1 Barevné hry

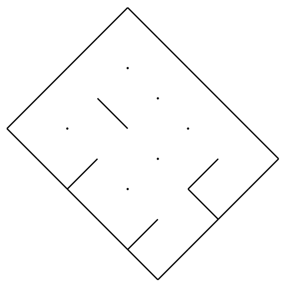
Až do teď jsme vyšetřovali konečné hry dvou hráčů, s nulovým součtem, v normální variantě a s úplnou informací. Nyní nestranné hry rozšíříme, tj. nebudeme striktně požadovat, aby oba hráči měli stejné tahy. Proto musíme rozlišit hráče. Jeden se bude jmenovat Levý a druhý pRavý hráč. V případě, že se bude jednat o barvy, levý bude mít přiřazenu modrou (bLue) a pravý čeRvenou (Red), popřípadě bíLou a čeRnou barvu. Oba hráči také mohou mít společnou barvu zelenou (šedou).

1.1 Mnohabarevný Hackenbush

Pozice ve hře jsou grafy $G = (V, E)$ s množinou $W \subseteq V$ uzlů a obarvených hran $f\colon E \to \{\text{modrá, červená, zelená}\}$. Levému hráči je dovoleno odebírat modré nebo zelené hrany, dovolenými tahy pro pravého hráče je odebírat červené nebo zelené hrany. Byla-li odebrána hrana $e \in E$, hra se posune do hry G' všech uzlů (a jejich hran) $G \setminus e$, které jsou ještě spojeny s W hranou.

Příklad 1.1. (Dominové dláždění) Dva hráči, levý a pravý, střídavě kladou kameny domina (2×1 čtvereček) na hrací plochu, levý svisle, pravý vodorovně. Jednotlivé kostky se nemohou překrývat. Hrací plocha je nejčastěji mřížka z $n \times n$ čtverečků. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Příklad 1.2. (Maze) Hra Maze spočívá v posouvání žetonu v bludišti (viz obrázek). Levý posouvá žeton šikmo doleva a dolů o kolik políček chce (avšak alespoň o jedno), pravý šikmo doprava a dolů také o libovolný počet políček. Není však možné táhnout skrz vnitřní nebo vnější obvodovou zeď. I v této hře prohrává, kdo nemůže táhnout. Na následujícím herním plánu určete pro každé z možných počátečních políček žetonu, jak hra dopadne.



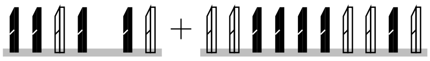
1.2 Třídy výsledků barevných her

Barevné hry rozkládají výsledky na 4 (a ne na dvě, jako v případě nestranných her) třídy. Tyto třídy jsou $\rightsquigarrow L$, $\rightsquigarrow R$, $\rightsquigarrow 1$ nebo $\rightsquigarrow 2$, tj. existuje vyhrávající strategie pro levého, pravého, prvního nebo druhého hráče, bez ohledu na možné soupeřovy tahy. V tabulce

Hra G	$L \rightsquigarrow R$	$L \rightsquigarrow L$
$R \rightsquigarrow L$	$\rightsquigarrow 2$, $G = 0$, nulová hra	$\rightsquigarrow L$, $G > 0$, kladná hra
$R \rightsquigarrow R$	$\rightsquigarrow R$, $G < 0$, záporná hra	$\rightsquigarrow 1$, $G \parallel 0$, fazy hra

V nestranných hrách jsou pouze dvě možnosti, tj. $\rightsquigarrow 1$ nebo $\rightsquigarrow 2$. Později budeme definovat binární relace $=, >, <, \parallel$ pro libovolné hry, nyní porovnáváme hry pouze s nulou.

Příklad 1.3. Hra Padající Domino má následující pravidla: Je dána řada postavených dominových kostiček, každá kostička je buďto bíLá nebo čeRná. Levý hráč si vybere nějakou bíLou kostičku a cvrnkne do ní buďto zleva nebo zprava, padající kostička tedy srazí zbytek řady buďto vlevo nebo vpravo. Poražené kostičky jsou odstraněny ze hry. Pravý hráč si vybírá čeRnou kostičku. Zjistěte, do jaké výsledkové třídy her patří následující součet pozic Padajícího Domina. Tak jako vždy, hráč, který nemůže táhnout, prohrál.



1.3 Definice

Hra je uspořádaná dvojice množin her. Píšeme $G \equiv (G^L, G^R)$ a každé levé $g \in G^L$ nazýváme levou možností a podobně pro každé $g \in G^R$ nazýváme pravou možností (tahů) ve hře G. Pro hru $G \equiv \left(\{g_1^L, g_2^L, \dots, g_m^L\}, \{g_1^R, g_2^R, \dots, g_n^R\}\right)$ píšeme stručně

$$G \equiv \left\{g_1^L, g_2^L, \dots, g_m^L \;\middle|\; g_1^R, g_2^R, \dots, g_n^R\right\}.$$

Nejjednodušší hrou je $(\varnothing, \varnothing) \equiv \{|\}$ Nazýváme ji nulou a označujeme značkou 0. Tedy platí

$$0 \equiv \{|\}.$$

Také říkáme, že nula vznikla nultého dne. Hry, které vzniknou následujícího dne (den vzniku 1) dostaneme tak, že nulu použijeme pro levou a pravou stranu:

$$(\{0\}, \varnothing), (\varnothing, \{0\}), (\{0\}, \{0\}),$$

nebo stručněji

$$\{0\,|\}, \{|\,0\} \text{ a } \{0 \mid 0\}.$$

Hru $\{0 \mid 0\}$ již známe, označili jsme ji hvězdičkou $*$ (je též nestrannou hrou, jako 0). Ostatní hry označíme rozumně a později zdůvodníme toto označení...

$$\{0\,|\} \equiv 1, \text{ a } \{|\,0\} \equiv -1.$$

1.4 Čísla a nim čísla

Obecně n znamená, že levý hráč má na výběr ještě n tahů, zatímco pravý nemá žádný tah.

Definice 1.4. Pro každé celé číslo n definujeme hru takto:

1. $0 \equiv \{|\}$,
2. $n+1 \equiv \{0, 1, 2, \dots, n\,|\}$ pro $n \geq 0$
3. $-(n+1) \equiv \{|\,0, -1, -2, \dots, -n\}$ pro ostatní n.

Upozorněme čtenáře, že tyto hry nelze zaměnit za hry $\bullet n$ (mají jiné vlastnosti). Zopakujme, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jsme definovali hru $\bullet n$ takto:

1. $0 \equiv \{|\}$,
2. $\bullet(n+1) \equiv \{0, \bullet 1, \bullet 2, \ldots, \bullet n \mid 0, \bullet 1, \bullet 2, \ldots, \bullet n\}$

Mimo čísla a nim čísla (nimbers $\bullet n$) vzniká mnoho dalších objektů (her), např. $\uparrow \equiv \{0 \mid *\}$, $\downarrow \equiv \{* \mid 0\}$ nebo $\{1 \mid 0\}$, $\{1 \mid *\}$, která nejsou čísla a ani nim čísla.

1.5 Součet a odčítání

Budeme-li vyšetřovat čísla, jistě budeme očekávat, že budou mít rozumné vlastnosti, např. $3 + (-1) = 2$ nebo $1 > 0$ a podobně.

Definice 1.5. Disjunktním součtem dvou her $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$ a $H \equiv \left\{H^L \mid H^R\right\}$ je hra

$$G + H \equiv \left\{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\right\}.$$

Věta 1.6. *Operace + je asociativní, komutativní s nulovým prvkem 0.*

Poznámka: J. Conway tyto důkazy nazývá jednořádkové, např. $X + 0 \equiv X$, protože 0^L ani 0^R neexistují.

Opačnou hru dostaneme tak, že zaměníme levého za pravého hráče vice versa, tj. $-\{a \mid b\} = \{-b \mid -a\}$. Obecně

$$-G \equiv \left\{-g^R \mid -g^L\right\}.$$

Úloha 1.7. Dokažte, že $-(n) = -n$ pro celá čísla a pro nimbers $-(\bullet n) = \bullet n$.

Uvědomte si, že $G + (-G) \not\equiv 0$, $G - H \equiv G + (-H)$.

1.6 Porovnávání her

Budeme definovat kvaziuspořádání (preuspořádání), tj. relaci reflexivní a tranzitivní $\geq$ s významem $G \geq H$ znamená, že tah levého hráče do G je nejméně tak dobrý, jako táhnout v H. Potom položíme $G = H \Leftrightarrow G \geq H \wedge H \geq G$. (Proč?)

Definice 1.8. Pro libovolné hry G a H platí:

$$\begin{aligned}
G \leq H &\Leftrightarrow G^L \ngeq H \wedge G \ngeq H^R, \\
G \geq H &\Leftrightarrow H \leq G, \\
H > G &\Leftrightarrow H \geq G \wedge H \nleq G, \\
G \parallel H &\Leftrightarrow G \nleq H \wedge G \ngeq H.
\end{aligned}$$

Příklad 1.9. $\uparrow \equiv \{0 \mid *\} > 0$.

Řešení:

Úloha 1.10. Dokažte $\{1 \mid 0\} > \downarrow$, a $\{1 \mid *\} > \uparrow$.

Úloha 1.11. Nakreslete Hasseův diagram her, které se narodily nejvýše druhého dne.

Věta 1.12. *Nechť $G \geq H$, potom $G - H \geq 0$.*

Ekvivalentně věta tvrdí, že levý hráč vyhraje ve hře $G - H$, nebude-li začínat, tj. $R \rightsquigarrow L$. Pokud by levý hráč vyhrál, i když by začínal, potom je hra kladná (tj. ve hře $G - H > 0$, $L \rightsquigarrow L$; pokud ale současně platí $L \rightsquigarrow R$, je hra $G - H$ nulová.

Věta 1.13. *Pro libovolnou hru G platí:*

1. $G^L \not\geq G$,
2. $G^R \not\leq G$,
3. $G \leq G$,
4. $G \geq G$.

Důkaz: Dokážeme první tvrzení, ostatní jsou triviální. První tvrzení indukcí: (sporem) předpokládejme, že $G \leq G^L$. Podle definice je tedy $G^L \not\geq G^L$, což je spor s 3, 2 analogicky, 3 je důsledek definice a 1, 2. Poslední tvrzení je důsledek definice. □

Věta 1.14. *Relace $\leq$ je reflexivní a tranzitivní.*

Důkaz: První tvrzení plyne z předcházející věty, tvrzení 3. Stačí dokázat tranzitivnost. Indukcí je třeba dokázat, že $G \geq H \wedge H \geq K \Rightarrow G \geq K$. Sporem:

1. $K^L \geq G$, potom by bylo $K^L \geq G \wedge G \geq H \Rightarrow K^L \geq H$ (spor s předpokladem $K \leq H$).
2. Analogicky, $K \geq G^R, H \geq K \Rightarrow H \geq G^R$ (spor s předpokladem $G \geq H$).

□

Definice 1.15. Pro libovolné dvě hry G, H platí

$$G = H \Leftrightarrow G \leq H \wedge H \leq G.$$

Věta 1.16. *Relace $=$ je ekvivalence.*

Zdůrazněme, že vyšetřujeme hry až na rovnost (tj. modulo $=$), stejně jako v případě nestranných her se stejnými Sprague-Grundyovými hodnotami jako ekvivalentními hrami.

Věta 1.17. *Relace $\leq$ je částečné uspořádání na množině tříd rozkladu podle relace $=$.*

Upozornění: Relace $\leq$ není úplné uspořádání (lineární), protože obsahuje neporovnatelné prvky $0, *$, platí $0 \not\leq * \wedge * \not\leq 0$.

Věta 1.18. *Pro libovolné hry G, g platí*

$$\left(G^L \cup g, G^R\right) \geq G, \qquad G \geq \left(G^L, G^R \cup g\right).$$

Nyní budeme definice a věty vyslovovat pouze pro levého hráče, analogické věty platí i pro pravého hráče.

Lemma 1.19. *Pro libovolné $x \in G^L$ platí $G \not\leq x$.*

Definice 1.20. Možnost $g \in G^L$ se nazývá dominující (pokrývající) přes možnost $g' \in G^L$, právě když $g \leq g'$.

Věta 1.21. *(O odebírání dominujících pozic) Je-li $G \equiv \{\dots g \dots g' \dots \mid \dots\}$ a platí-li $g \leq g'$, potom $G = \left(G^L \setminus g, G^R\right)$.*

Slovy odebráním dominujího prvku se hodnota hry nezmění.

Věta 1.22. *(O pravých reverzibilních prvcích)*

Úloha 1.23. Nalezněte reverzibilní prvky ve hře $\{0, *, \bullet 2, \bullet 4 \mid 0, *, \bullet 2, \bullet 4\}$.

Věta 1.24. *Ke každé hře G existuje právě jedna H bez dominujících prvků a reverzibilních a $G = H$. Tato hra se nazývá kanonickým tvarem.*

Důkaz: □

Úloha 1.25. Dokažte, že $\{0 \mid *\}$ je kanonickým tvarem hry $\{* \mid *\}$. Dokažte, že $\{0 \mid *\} = \uparrow + \uparrow + *$.

Úloha 1.26. Hru[1] lze hrát na libovolné desce o rozměrech $1 \times m$ s n kameny pro každého hráče. Levý hráč (toad, T) tahá doprava, pravý hráč (frog, F) tahá směrem vlevo. Cílem hry je znemožnit protihráči provést tah. Na začátku hry jsou kameny soupeřů na protilehlých stranách desky. Hráči se v tazích pravidelně střídají. Hráč na tahu musí provést jednu z následujících akcí:

1. Posunout kámen o jedno pole (ve svém směru) vpřed na prázdné pole.
2. Přeskočit soupeřův kámen a položit kámen na bezprostředně dalším volném poli.

Hráč, který provede poslední tah, se stává vítězem.

1.7 Čísla

Definice 1.27. Hra G se nazývá číslem, právě když všechny možnosti G^L, G^R jsou čísla a když neexistuje $x \in G^L, y \in G^R$ tak, že $x \geq y$.

Poznámka: Uvědomte si, že objekty $n, -n$ etc. z definice 1.4 jsou čísla a nim čísla (mimo nuly) nejsou čísla.

Podle definice je třeba $\{1 \mid 3\}$ číslo, ale které?

Úloha 1.28. $\{1 \mid 3\} = 2$.

[1] Další poznámky viz http://en.wikipedia.org/wiki/Toads_and_Frogs_(game)

Je třeba dokázat, $\{1 \mid 3\} \geq 2 \wedge \{1 \mid 3\} \leq 2$. Čtenář nahlédne, že např. $1 \ngeq 2$, protože $2^L \geq 1$ etc. Existují i další čísla:

Úloha 1.29. Ověřte, že $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 1$, a proto $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, což může sloužit za definici.

Podobně definujeme $\frac{1}{4} \equiv \left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\}$, protože $\left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\} + \left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. Poslední rovnost rychle dokážeme, představíme-li si hru Hackenbush a pozici (hru) $\left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\} + \left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2} = 0.$, kde $\rightsquigarrow 2$.

Věta 1.30. *Pro každé číslo x platí*

$$(\forall x^L, x^R)\ x^L < x < x^R.$$

Důkaz: Dokážeme $x^L < x$. Víme, že $x^L \ngeq x$. Budeme dokazovat tedy $x^L \leq x$ (rovnost neplatí). Podle definice $\leq$ je $x^{LL} \ngeq x \wedge x^L \ngeq x^R$. Sporem: $x^{LL} \geq x \Rightarrow x^L > x^{LL} \geq x \Rightarrow x^L > x(spor)$. Nebo $x^L \geq x^R$, což je spor s tím tvrzením, že x je číslo. □

Pro čísla platí $x^L < x < x^R$, ale pro hry pouze $x^L \ngeq x \ngeq x^R$

Věta 1.31. *Relace $\leq$ je na číslech úplné uspořádání. To znamená, že libovolná dvě čísla jsou porovnatelná ($x \leq y \vee y \leq x$).*

Důkaz: Předpokládejme, že $x \nleq y$, potom platí $x^L \geq y \vee x \geq y^R$. Protože x, y, x^L, y^R jsou čísla, platí $x > x^L \geq y \vee x \geq y^R > y$, tj. $x \geq y \vee x \geq y$. □

Úloha 1.32. Dokažte: $\left\{\frac{1}{4} \mid 1\right\} = \frac{1}{2}$

Snadno se dokáže, $\left\{\frac{1}{4} \mid 1\right\} = \frac{1}{2} \geq 2 \wedge \left\{\frac{1}{4} \mid 1\right\} = \frac{1}{2} \leq 2$. Všimněte si, že hodnota $\left\{\frac{1}{4} \mid 1\right\}$ není aritmetickým průměrem krajních hodnot. Jiným příkladem je třeba $\{0 \mid 3\} = 1$. Hodnota sice leží v intervalu, ale jak uvidíme, tato hodnota je nejjednodušším (také nejstarším) číslem (v tomto případě s nejmenším jmenovatelem) mezi čísly tvaru $m/2^k$. Toto vyjádření je jednoznačné.

Věta 1.33. *(Věta o nejstarším prvku) Pro libovolnou hru x a každé číslo z platí, je-li $x^L \ngeq z \ngeq x^R$, a žádná možnost z' v z nesplňuje $x^L \ngeq z' \ngeq x^R$, potom $x = z$.*

Poznámka: Viděli jsme, že Conwayova konstrukce čísel zahrnuje dva pohledy na čísla:

1. Cantorovu teorie (nekonečných) ordinálních čísel,
2. Dedekindovy řezy racionálních čísel (reálná čísla),

a to vše pomocí jedné „dvojdefinice“ 1.27. Porovnáme-li to se školskou matematikou, kde se sestrojují celá čísla z přirozených (jako třídy ekvivalence dvojic přirozených čísel $x-y$) k racionálním číslům (jakožto tříd ekvivalentních zlomků celých čísel x/y) a nalézají se první reálná čísla ($\sqrt{2}, \pi, \varphi, \mathrm{e}, \ldots$) jako třídy ekvivalence Dedekindových řezů racionálních čísel... Zde je vidět praktičnost našeho postupu, kde číselné struktury vznikají najednou.

1.8 Násobení, dělení,...

Definice 1.34. Pro libovolná dvě čísla x, y definujeme násobení:

$$x \cdot y \equiv \left\{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\right\}.$$

K ospravedlnění této definice uvažme například, že

$$(x - x^L) \cdot (y - y^L) > 0 \Rightarrow x \cdot y > x^L y + x y^L - x^L y^L \text{ atd.}$$

Úloha 1.35. Dokažte, že $0 \cdot x = 0, 1 \cdot x = x$.

Úloha 1.36. Vypočítejte $2 \cdot 1/2$, tj. $\{1 \mid\} \cdot \{0 \mid 1\}$.

Definice 1.37. Pro každé kladné číslo x definujeme y takto:

$$y = \left\{0, \frac{1 + (x^R - x) y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x) y^R}{x^L} \;\middle|\; \frac{1 + (x^L - x) y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x) y^R}{x^R}\right\}.$$

Tato definice potřebuje vysvětlení: Jednak je to doplnění 0 zleva. Kladná čísla mají tu vlastnost, že po doplnění zleva nulou se nezmění. Druhá poznámka: 0 v definici $y \equiv \frac{1}{x}$ má význam počátečního kroku v indukci. Protože $0 \in Y^L$, pomocí tohoto prvku spočítáme levou i pravou část, a dostaneme pravou část atd. Například je-li $x \equiv 3 \equiv \{2 \mid\}$, Protože $x^L - x = 2 - 3 = -1$, dostaneme

$$y = \left\{0, \frac{1 - y^R}{2} \;\middle|\; \frac{1 - y^L}{2}\right\}.$$

Začneme nulou a dostaneme $\{0, \ldots \mid 1/2, \ldots,\}$ a opakujeme $\{0, 1/4, \ldots \mid 1/2, 3/8, \ldots,\}$.

Úloha 1.38. Dokažte, $2 \cdot \frac{x}{2} = x$. Potom dokažte, že z předcházející definice plyne, že $x \cdot y = 1$.

1.9 Velká čísla

Nyní se budeme věnovat ordinálním typům dobře uspořádaných množin (teorie ordinálních čísel). Přichází den ω a s ním i číslo

$$\omega \equiv \{0, 1, 2, \ldots \mid\}.$$

Toto číslo je větší než libovolné konečné číslo. Ekvivalentní definice je

$$\omega \equiv \left\{0, 1 + \omega^L \mid\right\}.$$

Kolik je $\omega - \omega$?

Dalším číslem je

$$\omega + 1 \equiv \{0, 1, 2, \ldots, \omega \mid\},$$

etc.

Vyšetříme ještě číslo $\{0, 1, 2, \dots \mid \omega\} \equiv x$. Toto číslo je větší než libovolné konečné číslo, ale menší než ω ($n < x < \omega$). Toto číslo x označíme $\omega - 1$, protože $\omega + (-1) = \{0, 1, 2, \dots \mid \omega\}$. Podobně získáme i čísla $\omega - 2, \omega - 3$, nebo dokonce

$$\omega - n = \{0, 1, 2, \dots \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \dots, \omega - n + 1\}.$$

Konečně můžeme vytvořit také číslo

$$\{0, 1, 2, \dots \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \dots\}.$$

Nechá se dokázat, že toto číslo je $z \equiv \omega/2$, neboli $z + z = \omega$.

1.10 Počítání s nimbers

Z teorie nestranných her víme, že $x \oplus y = \operatorname{mex}\{x' \oplus y, x \oplus y'; x' < x, y' < y\}$. Na nim číslech je možné nadefinovat analogickým způsobem násobení $\odot$ takto:

$$x \odot y = \operatorname{mex}\{x' \odot y \oplus x \odot y' \ominus x' \odot y'; x' < x, y' < y\}.$$

Samozřejmě $\oplus = \ominus$. Oprávněnost definice nahlédneme, jedná se o binární relaci (výsledek je mex). Ověříme pár identit:

Věta 1.39. $0 \odot y = 0$.

Důkaz: Je triviální, 0^L ani 0^R neexistují. □

Věta 1.40. $1 \odot y = y$.

Důkaz: $1 \odot y = \operatorname{mex}\{0 \odot y \oplus 1 \odot y' \ominus 0 \odot y'; y' < y\} = \operatorname{mex}\{0 \oplus y' \ominus 0; y' < y\} =$
$= \operatorname{mex}\{0 \oplus y' \ominus 0; y' < y\} = \operatorname{mex}\{y'; y' < y\} = y$. □

Příklad 1.41. $2 \odot 2 = 3$

Řešení: $\operatorname{mex}\{x' \odot 2 \oplus 2 \odot y' \ominus x' \odot y'; x', y' \in \{0, 1\}\} = \operatorname{mex}\{0, 1, 2\} = 3$.

Úloha 1.42. Spočítejte Cayleyho tabulku násobení nim čísel (nimbers).

Úloha 1.43. $2^{2^n} \odot 2^{2^n} = (3/2)2^{2^{n+1}}$.

Úloha 1.44. $\omega^3 = 2$.

[2hs03RMF actual w-kst-barevne-hry.tex, 25/10/14, 22:29]