Když čísla jsou hry a hry jsou čísla

1 Kombinatorické hry

Ukážeme, že hra je možné sčítat a odčítat (!) podobně jako běžná čísla. Přirozeně vzniká uspořádaná struktura množiny kombinatorických her.

Kombinatorickými hrami se obvykle rozumí hry dvou hráčů, kteří se nazývají *Levý* a *pRavý*. Pro hru je určena množina všech možných pozic a pravidla hry určují dvě množiny P^L a P^R, kam je možné z počáteční pozice P zahrát. Množina P^L odpovídá všem možných tahům Levého hráče z pozice P, podobně P^R. Hra začíná v nějaké pozici P a Levý a pRavý se v tazích střídají. Naši pozornost nyní zaměříme především na podtřídu těchto her, kde

1. jsou pouze dva výsledky hry; buď Levý vyhraje nebo pRavý,
2. počet pozic je konečný,
3. hráč, který nemůže táhnout, prohrál (tzv. normální varianta hry).

Hra nemůže skončit patem ani remízou, kombinatorickou hrou není ani go (posuďte konec hry), atd. Rámec kombinatorických her budeme ale někdy překračovat.

V této kapitole budou všechny vyšetřované hry kombinatorické.

Následující dva standardní příklady her ilustrují rámec teorie her.

Příklad 1.1. DOMINOVÁNÍ Hru hrají dva hráči s kostkami domina. Hráči hrají s kostkami domina na čtvercové síti, typicky 8×8. Hráči na tahu střídavě pokládají kostky domina na hrací plochu, tak, že kostka domina obsadí dvě vedle sebe čtvercová pole. Kostky se nesmějí křížit, ani obsazovat políčka vícekrát. Levý hráč pokládá kostky svisle (vertikálně) a pravý hráč vodorovně (horizontálně). Hra končí v okamžiku, kdy hráč nemůže umístit svou kostku. Tento hráč prohrál a jeho soupeř vyhrál.

Příklad 1.2. NIM Na stole leží několik hromádek kamenů. Označíme $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ počty kamenů na jednotlivých hromádkách a pozici označíme

$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$. Hru hrají dva hráči. Hráči se v tazích střídají. Každý tah spočívá ve vybrání jedné hromádky a z ní hráč odebere nejméně jeden kámen. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Důležitou podstrukturou struktury kombinatorických her jsou tzv. *nestranné hry*, ve kterých v každé pozici množina možných tahů Levého je stejná jako pro pRavého a naopak. Například hra NIM je nestrannou, ale DOMINOVÁNÍ není, díky rozdílným pravidlům pokládání kostiček.

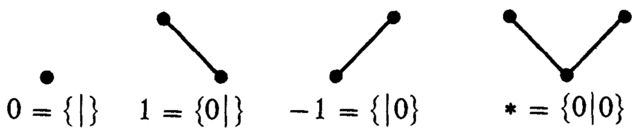
V abstraktní formě je každá kombinatorická hra ztotožněna se svou počáteční pozicí a z každé pozice P jsou jednoznačně určeny množiny možných tahů (někdy nazývané také *možnosti*) P^L pro Levého a P^R pRavého. Zapisujeme jednoduše

$$P \equiv \left\{P^L \mid P^R\right\}.$$

Pravidly hry je určeno, kdo ve hře začíná (resp. nezačíná), kdo udělá první tah z dané pozice.

2 Příklady jednoduchých her

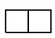
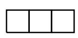
Nejjednodušší hry jsou definovány pozicemi, které jsou dosažitelné nejvýše jedním tahem. Takové hry jsou čtyři, které mají speciální označení $0, 1, -1, *$ (proč se některé hry označují čísly bude vysvětleno později). Tyto hry mají následující grafy:



V první hře (0) žádný z prvních hráčů nemůže táhnout, ve druhé je jeden možný tah Levého, ve třetí pro pRavého a v poslední hře vyhraje první (začínající) hráč.

Tyto hry jsou z jedné strany stavebními kameny složitějších her, a současně se vyskytují jako koncové pozice dalších komplikovanějších her.

Například ve hře DOMINOVÁNÍ v postavení

 nebo 

Levý nemůže táhnout a pRavý může táhnout do hry s hodnotou nula. Tedy naše hra DOMINOVÁNÍ má hodnotu $-1 \equiv \{\mid 0\}$.

Když se hraje hra, je přirozená otázka, samozřejmě, který z hráčů vyhraje, případně o kolik (jak hra dopadne). Centrální roli v teorii kombinatorických her má tato klasifikace

Hra G **se nazývá kladná** (píšeme $G > 0$), pokud existuje vyhrávající strategie pro levého hráče (zapisujeme $\rightsquigarrow L$),

Hra G **se nazývá záporná** (píšeme $G < 0$), pokud existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče (zapisujeme $\rightsquigarrow R$),

Hra G **se nazývá nulová** (píšeme $G = 0$), pokud existuje vyhrávající strategie pro II. hráče (zapisujeme $\rightsquigarrow 2$),

Hra G **se nazývá fazy** (píšeme $G \parallel 0$), pokud existuje vyhrávající strategie pro I. hráče (zapisujeme $\rightsquigarrow 1$).

V prvních dvou případech nezáleží na tom, který z hráčů začíná a jak bude oponent hrát. V posledním případě vyhraje začínající hráč, a v nulové hře vyhraje nezačínající hráč.

Úloha 2.1. Ukažte, že každá hra patří do právě jedné z těchto čtyř tříd.

Zápisy můžeme také kombinovat mezi sebou obvyklým způsobem.

$G \geq 0$ znamená $G > 0$ nebo $G = 0$
$G \leq 0$ znamená $G < 0$ nebo $G = 0$
$G \mathrel{|\!\rhd} 0$ znamená $G \parallel 0$ nebo $G > 0$
$G \mathrel{\lhd\!|} 0$ znamená $G \parallel 0$ nebo $G < 0$.

Úloha 2.2. Ukažte, že $G \geq 0$ znamená, že Levý vyhraje, pokud ve hře nezačíná ($R \rightsquigarrow L$). Podobně $G \mathrel{|\!\rhd} 0$ znamená, že Levý vyhraje, pokud ve hře začíná (píšeme $L \rightsquigarrow L$).

Poznamenejme, že nezáleží na tazích soupeře, a že hráč vyhraje znamená, že pro něj existuje vyhrávající strategie. Hráči se snaží hrát optimálně.

Příklad 2.3. Hra 0 je nulová, hra 1 kladná, -1 záporná a hra $*$ je fazy.

3 Sčítání, odčítání a uspořádání

Předpokládejme, že Levý a pRavý hrají současně n her $G_1, G_2, \ldots, G_n$ simultálně takto: Hráč na tahu si vybere jednu z her a v této hře provede pravidly povolený tah (ostatní hry zůstanou nezměněny). Hráč prohraje, samozřejmě, pokud nemůže zahrát v žádné komponentě. Tato pravidla definují novou hru G, kterou nazýváme *disjunktním součtem* (nebo jednoduše *součtem*) her a píšeme

$$G \equiv G_1 + G_2 + \cdots + G_n.$$

Některé hry mají přirozenou reprezentaci jako součet několika triviálních (nebo jednodušších) her. Například NIM na několika hromádkách lze chápat jako součet několika jednohromádkových variant této hry (mimochodem, jejich řešení je skutečně triviální). Tedy naučit se vyhrávat ve hře NIM znamená pochopit součet her. Obecně, pozice hry se může po několika krocích (tazích) rozpadnout na součet několika her.

Další jednoduchou algebraickou operací je *opačná hra*. Hra se získá vyměněním rolí Levého za pRavého a naopak. Taková hra se označuje $-G$ a rekurzivně se píše $G \equiv \left\{-G^R \mid -G^L\right\}$, kde např. $-G^L$ jsou opačné hry (pozice) ke hře G^L. Je vidět, že $-(-G) = G$ a že $G > 0$ znamená $-G < 0$. Je-li G nulová nebo fazy, platí to i pro opačnou hru $-G$.

Přirozeným způsobem můžeme definovat *rozdíl her*

$$G - H \equiv G + (-H).$$

Úloha 3.1. Ukažte, že platí $1-1 = 0$ a $*+* = 0$, kde hry $1, -1, 0$ a $*$ jsou definovány jako předešle. Důsledkem je třeba tvrzení, že hra -1 je opačná hra ke hře 1.

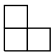
Úloha 3.2. Ukažte, že pro libovolnou hru G platí $G - G = 0$ tak, že ve hře $G - G$ $\rightsquigarrow 2$, tj. existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.

Konečně definujme také relaci $>$ na hrách: Pro libovolné hry G, H

$$\begin{aligned}
G > H &\quad\Leftrightarrow\quad G - H > 0\\
G < H &\quad\Leftrightarrow\quad G - H < 0\\
G = H &\quad\Leftrightarrow\quad G - H = 0\\
G \parallel H &\quad\Leftrightarrow\quad G - H \parallel 0.
\end{aligned}$$

Tato definice je konzistentní v tom smyslu, že například platí, je-li H nulová, potom G a $G + H$ patří stejné výsledkové třídě (hry dopadnou stejně).

Uspořádání se očekávatelným způsobem chová ke sčítání, tj. např. je-li $G \geq 0$ a $H \geq 0$, potom $G + H \geq 0$ a pod. Důkazy je možné přenechat čtenáři.

Poznamenejme, že je-li $G = H$, říkáme, že *hry G a H jsou ekvivalentní*. Znamená to, že hry nemusí být „naprosto stejné“. Příkladem jsou hry $\square\square = \square\square\square$ nebo dokonce hra DOMINOVÁNÍ  je ekvivalentní jednohromádkové variantě hry NIM s jedním kamenem (mají stejnou hodnotu). Proč tomu tak je? Protože $G - H = 0$, tj. existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, tj. $\rightsquigarrow 2$, tedy rozdíl je nulová hra.

Úloha 3.3. Ukažte, že hra NIM na dvou stejných hromádkách (ekvivalentních) je nulová hra. Dokonce, je-li hra NIM na dvou hromádkách nulová, potom kameny na hromádkách jsou ekvivalentní (mají stejný počet).

4 Nestranné hry a nim čísla

Teorii NIM nezávisle na sobě rozvinuli Grundy a Sprague před II. světovou válkou. Stručně nastíníme jejich výsledky.

Připomeňme, že hra se nazývá nestrannou, pokud Levý a pRavý hráč má v každém okamžiku na výběr stejnou množinu tahů. To nás přivede i k zjednodušení našich sendvičových zápisů. Budeme psát jednoduše $G \equiv \{A, B, C, \ldots\}$ místo dlouhého $G \equiv \{A, B, C, \ldots \mid A, B, C, \ldots\}$, kde $A, B, C, \ldots$ jsou nestranné hry. Je jasné, že pro každou nestrannou hru platí dokonce $G + G = 0$, tj. každá nestranná hra je sama k sobě opačnou.

Následující jednoduchý zápis má ústřední význam v teorii nestranných her. Začíná-li hráč hrát jednohromádkovou variantu hry NIM s n kameny, budeme označovat takovou hru $\bullet n$ a nazývat *nim číslo* (*nimber*). Induktivně jsou tato čísla definována jako

$$\bullet n \equiv \{\bullet 0, \bullet 1, \bullet 2, \ldots, \bullet(n-1)\},$$

podle toho, kam hráč může svým prvním tahem táhnout. Odpovídá to tomu, kolik hráč může odebrat kamenů. Platí $\bullet 0 = 0$ a $\bullet 1 = *$.

Hlavní výsledek tzv. Sprague–Grundyovy teorie nestranných her je tvrzení, že *každá nestranná hra je ekvivalentní nějaké jednohromádkové variantě hry* NIM.

V induktivním důkazu se vyskytuje funkce mex. Mex je nejmenší vyloučené číslo. Podrobně jsme se této problematice již věnovali na jiném místě.

Je-li nestranná hra G ekvivalentní hře $\bullet n$, potom se přirozené číslo n nazývá *Grundyovou hodnotou*, resp. *nim hodnotou* nebo *nim číslem* (*nimber*).

Samotnou Sprague–Grundyovu teorii můžeme použít i na hru NIM.

Mějme tři hromádky hry NIM velikosti a, b, c. Podle Sprague–Grundyovy věty existuje jedna hromádka $\bullet n$ ekvivalentní s těmito hromádkami. Podle definice součtu je $\bullet n = \bullet a + \bullet b + \bullet c$. Tedy budeme potřebovat součet hromádek hry NIM. K tomu jistě bude stačit, budeme-li umět sčítat dvě hromádky, tj. budeme-li mít dvě hromádky velikosti a, b existuje n tak, že $\bullet n = \bullet a + \bullet b$. Samotné n je závislé na a, b. Bývá zvykem psát

$$\bullet(a \oplus b) = \bullet a + \bullet b,$$

kde $\oplus$ je nová operace. Tato operace se nazývá *nim součet*. Operace definuje nad přirozenými čísly zajímavou algebraickou strukturu.

Jak nalezneme pravidla pro nim součet? Můžeme postupovat induktivně, počínaje malými hodnotami a, b a použitím konstruktivní procedury z důkazu Sprague–Grundyovy věty. Například víme, že $\bullet a + \bullet a = 0$, pro každé $a \in \mathbb{N}$. Nyní najdeme třeba $\bullet 1 + \bullet 2$. Pravidly povolenými tahy z hromádek o velikosti 1 a 2 jsou nové pozice $\bullet 2, \bullet 1 + \bullet 1, \bullet 1$. Protože $\bullet 1 + \bullet 1 = 0$, $\operatorname{mex}\{2, 0, 1\} = 3$, proto $\bullet 1 + \bullet 2 = \bullet 3$.

Obecné pravidlo (a důkaz přeskočíme) dostaneme takto: Nim součet různých mocnin dvou je obvyklý součet, tj. $2^n \oplus 2^m = 2^n + 2^m$, pro $n \neq m$. Např. $1 \oplus 2 \oplus 8 = 2^0 + 2^1 + 2^3 = 1 + 2 + 8 = 11$. Použijeme-li nim součet $\oplus$ na stejné mocniny ($\bullet m + \bullet m = 0$), dostaneme samozřejmě nulu.

$$9 \oplus 13 \oplus 2 = (8 + 1) \oplus (8 + 4 + 1) \oplus (2) = 4 + 2 = 6$$

Nyní již známe, jak se hraje NIM s libovolným počtem hromádek. Pokud na počátku bude kladné nim číslo, potom existuje vyhrávající strategie pro I. hráče (táhnout tak, aby výsledek byl nula). V nulové hře $\rightsquigarrow 2$ se jedná o prohrávající pozici a můžeme pouze doufat, že protihráč nezná naši miniteorii a udělá chybu.

Příklad 4.1. Začneme hrát v pozici NIM$[9, 13, 2]$, tj. hraje se hra NIM na třech hromádkách s 9, 13 a 2 kameny. Můžeme vyhrát? A v případě, že ano, jak bude vypadat náš první tah? Řešení: Nim součet má nim hodnotu 6 (to jsme již jednou počítali), tedy hodnotu kladnou, takže první hráč má výhodu. Ne každý tah je ale dobrý. Musíme táhnout tak, aby výsledek byl nula. $13 \oplus 6 = 8 + 4 + 1 + 4 + 2 = 11$. Odebereme-li tedy z hromádky o velikosti 13 dva kameny, bude součet nulový.

Samozřejmě že tuto naši teorii můžeme aplikovat na libovolnou nestrannou hru, ale její použití může být někdy komplikovanější.

5 Hry jako čísla a čísla jako hry

Nestranné hry, které jsme nyní vyšetřovali, jsou fazy (až na nulovou hru). Nyní se budeme věnovat některým kladným a záporným hrám a ukážeme jejich spojitost s obvyklými čísly. Vraťme se ještě k obrázku na straně 2. Máme-li hru 1 a pravidla sčítání, přirozenou cestou získáme čísla, která odpovídají celým číslům, totiž: $1 + 1 = 2, 1 + 1 + 1 = 3, \ldots$ a také $-1 - 1 = -2, -1 - 1 - 1 = -3, \ldots$ Tedy všechna celá čísla umíme namodelovat pomocí kladných a záporných her a také naopak, tj. existují rozkladové třídy her, které jsou reprezentovány pomocí celých čísel.

Je jednoduché nalézt takové pozice ve hře DOMINOVÁNÍ, které mají celočíselné hodnoty.

A jak je to s ostatními čísly? Můžeme třeba nalézt hru, která by odpovídala $1/2$? Hra půl ($1/2$) je definována jako $\{0 \mid 1\}$. Můžeme nějakým výpočtem ověřit, že tomu skutečně tak je, např. $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 1$. Potom jednoduše můžeme definovat i čísla $n/2$ jako součet $n \times 1/2$ (přirozený násobek). Hra $1/4$ má vyjádření $\{0 \mid 1/2\}$ a pod.

Budeme-li takto pokračovat, dostaneme dokonce hry odpovídající *dyadickým racionálním číslům*, tj. číslům tvaru $n/2^m$.

Zdůrazněme, naše sčítání a odčítání her odpovídá obvyklému sčítání a odečítání reálným číslům. Ne všechny hry jsou ale čísla (např. $\bullet 1$). Je možné vytvořit všechna reálná čísla pomocí her a získat tak bohatou strukturu jako jsou reálná čísla.

Doporučená literatura

[CGT] A. Siegel: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[LIP] M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*, A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA, 2007

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[TKH] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://www.wopravil.cz/hs (červenec 2014)

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6