1 Úlohy z adresáře I

Úloha 1.1. Nechť n je sudé. Budeme uvažovat šachovnici $n \times n$, ve které jsou odebrány dva protilehlé rohy. Ukažte, že šachovnici nelze pokrýt kostkami domina. (Domino zaujme dva vedle sebe ležící čtverce, nesmí se překrývat.)

Úloha 1.2. (Symetrie) Na stole leží několik hromádek kamenů. Hráč na tahu musí odebrat nenulový počet kamenů. Ukažte, že pozice $\textsc{Nim}[2, 3, 3]$ a pozice $\textsc{Nim}[2, 3, 4]$ jsou nenulové. Je také nenulová pozice $\textsc{Nim}[2016, 2017, 2018, 2019]$?

Úloha 1.3. (Symetrie) Předpokládejme, že se hraje hra DOMINO (nebo CRAM) na dvou šachovnicích 8×8 políčkách. V každém tahu je možné položit jednu kostku domina na právě jednu šachovnici (ne na dvě). Ukažte, že druhý hráč má vyhrávající strategii.

Úloha 1.4. (Symetrie) Na šachovnici 8×8 leží královna. Královna se může posunout o jeden řádek dolů, nebo o libovolný počet políček vlevo. Prohraje hráč, který nemůže táhnout. Nalezněte pozice, ve kterých první hráč prohraje. Tyto pozice označte $-$. Kolik je takových polí?

Úloha 1.5. Na stole leží dvě hromádky kamenů, na každé není více jak 7 kamenů. V jednom tahu hráč může odebrat jeden kámen z levé, nebo libovolný počet z pravé hromádky. Nalezněte všechny vyhrávající pozice. (Izomorfní hra).

Úloha 1.6. (Symetrie) Na stole leží dvě hromádky kamenů, na každé není více jak 7 kamenů. Hraje se jako hra NIM s těmito pravidly: V jednom tahu lze odebrat jeden, či dva kameny z obou současně, nebo přeložit 1 nebo 2 kameny z levé na pravou hromádku. Kdo nemůže udělat tah, prohrává. Nalezněte pozice (konfigurace), ve kterých první hráč prohraje. Nalezněte izomorfní hru na šachovnici.

Úloha 1.7. Jsou dány dvě hromádky kamenů, na každé ne více jak 7 kamenů (hromádky nemusí být stejné, mohou být i prázdné). V jednom tahu hráč může:

1. odebrat z jedné hromádky 2 kameny a z druhé jeden kámen, nebo
2. z jedné hromádky odebrat 2 kameny a přidat do druhé hromádky jeden kámen.

Prohraje hráč, který nemůže táhnout. Skutečně hra skončí?

1. Nalezněte: pro které počáteční konfigurace (pozice) velikostí hromádek kamenů prohraje první hráč.
2. Nalezněte odpovídající šachovou interpretaci.

Úloha 1.8. Nalezněte hodnoty her:

1. $\{-4 \mid -1\}$
2. $\{1 \mid 7/4\}$
3. $\{0 \mid 11/4\}$
4. $\{3 \mid 5\}$, $\{3 \mid 6\}$, $\{-1/2 \mid 5\}$, $\{3 \mid 5\}$, $\{1/4 \mid 7/8\}$
5. $\{-1 \mid 3/4\} + 3$.

Úloha 1.9. Pro každou následující hypotézu nalezněte dva tři příklady a dokažte:

1. $\{n \mid\} = n+1$
2. $\{n \mid n+1\} = n+1/2$
3. $\{n \mid n+2\} = n+1$
4. $\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^{n+1}}$
5. $\left\{\frac{1}{2^n} \;\middle|\; \frac{2}{2^n}\right\} = \frac{1{,}5}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}}$
6. $\left\{\frac{p}{2^n} \;\middle|\; \frac{p+1}{2^n}\right\} = \frac{p+0{,}5}{2^n} = \frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{2p}{2^{n+1}} \;\middle|\; \frac{2p+2}{2^{n+1}}\right\}.$

Úloha 1.10. Ukažte, že $1+1=2$, kde $1=\{0 \mid\}$ a $2=\{1 \mid\}$. Můžete předpokládat, že $x+0=x$. Každý krok důkazu odůvodněte!

Úloha 1.11. Uvažujme hru $G = \{\{\mid 4\}, \{6,3 \mid\}, 2, \{\mid 3,7\}, \{5,1 \mid\} \mid\}$. Ukažte, že G je číslo a vypočtěte jeho hodnotu.

Úloha 1.12. Které z následujících her jsou čísla?

1. $G = \{0, \{0 \mid 1\} \mid 1, 2\}$
2. $G = \{0, \{0 \mid 0\} \mid 1, \{1 \mid 1\}\}$
3. $G = \{0, \{0 \mid \{0 \mid 1\}\} \mid\}$
4. $G = \{-2, -3, -4 \mid -1\}$
5. $G = \{\mid \{1 \mid 0\}\}$.

Úloha 1.13. Ukažte, že $\{1 \mid 2\} + \{1 \mid 2\} = 3$. Které číslo je $\{1 \mid 2\}$?

Úloha 1.14. Rozhodněte, zda platí $\{0 \mid 4\} = 2$.

Úloha 1.15.
1. Sestrojte nadreálná čísla $3/8$ a $5/8$ a dokažte, že $3/8 + 5/8 = 1$. Definujte všechna ostatní čísla, která použijete.
2. Sestrojte $2/5$ a $3/5$ jako nadreálná čísla a ověřte, že $2/5 + 3/5 = 1$. Můžete předpokládat, že jsou již vytvořena všechna dyadická čísla. (Dyadická čísla jsou racionální čísla tvaru $m/2^k$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}$.)
3. Definujme reálné číslo x jako takové číslo, pro které $-n < x < n$ pro nějaké přirozené číslo n a je-li $x \equiv \{x-1, x-1/2, x-1/4, \dots \mid x+1, x+1/2, x+1/4, \dots\}$. Ukažte, že každé reálné číslo má jednoznačně určený tvar $\{L \mid R\}$, kde L, R jsou množiny dyadických čísel takových, že
   (a) L, R jsou neprázdné.
   (b) L nemá největší prvek a R nemá nejmenší prvek.
   (c) Všechna dyadická čísla (mimo jedno) jsou obsažena v L a R.
4. Zopakujme, že $\omega = \{0, 1, 2, \dots \mid\}$ je nadreálné číslo. Sestrojte $\sqrt{\omega - 1}$ a $(\omega+1)^{-1}$. Můžete předpokládat, že všechna reálná čísla jsou již vytvořena. Pravděpodobně budete muset vytvořit i další čísla.

Úloha 1.16. Pokud A a B jsou hry, stručně vysvětlete, co to je $A+B$, $-A$, $A > B$ a $A \parallel B$ a $A = B$. Pro každou následující relaci nalezněte A, B tak, aby $A > 0$ a $B \parallel 0$ tak, aby splňovaly relaci:

1. $A + B > 0$
2. $A + B = 0$
3. $A + B \parallel 0$
4. $A + 2B \parallel 0$
5. $A + 2B = 0$.

Úloha 1.17. Nechť p, q jsou čísla. Vysvětlete, jak najdete hodnotu hry $\{p \mid q\}$. Nalezněte hodnoty her: $\{1 \mid 2\}$, $\{1 \mid 4\}$, $\{-1 \mid 4\}$, $\{-1 \mid 0\}$, $\{1/3 \mid \pi\}$ a $\{7/16 \mid 15/16\}$. Co lze očekávat, je-li $p < q$ a p, q nemusí být čísla? Např. $\{\uparrow \mid 1\}$, $\{0 \mid \uparrow\}$ nebo $\{\pm 1 \mid 2\}$.

Úloha 1.18. Vysvětlete, co to znamená součet her $G + H$ a pro libovolné hry G, H ukažte, že:

1. $G + 0 \equiv 0$
2. $G + (-G) = 0$
3. $G + G = 0$ pro libovolnou nestrannou hru G
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
5. $\uparrow + \uparrow = \{0 \mid \uparrow\} + *$, kde $\uparrow \equiv \{0 \mid *\}$.

Úloha 1.19. Nechť $G = \{0, * \mid \uparrow\}$.

1. Ukažte, že $G > 0$.
2. Dokažte, že $*$ je reverzibilní.
3. Ukažte, že $G = \Uparrow *$.

Úloha 1.20. Nalezněte den narození následujících her:
$0, 3, -1/2, 17/32, 5/2, \{5, 6 \mid 9\}, \{1/8 \mid 21/32\}$.

Úloha 1.21. Nalezněte kanonický tvar hry $\{0, \{2 \mid 0\} \mid \{0 \mid -2\}, \{1/2 \mid -2\}\}$. Ukažte, že $\{2 \mid 0\}$ je reverzibilní a hra $\{1/2 \mid 2\}$ je dominující.

Úloha 1.22. Uvažujme následující výrok: Pro dvě hry G, H, která nejsou čísla, platí: Je-li $G > 0$ a $H < 0$, potom $G + H \parallel 0$. Pokud tvrzení je pravdivé, dokažte. Jinak nalezněte protipříklad.

Úloha 1.23. Je-li p číslo, ukažte, že $p + * = \{p \mid p\}$. Platí tato rovnost, je-li p obecně hra? Nalezněte vhodný příklad!

Úloha 1.24. (Porovnávání her)

1. (a) Popište obecnou metodu porovnávání her.
   (b) Které jsou při porovnání 4 rozkladové třídy?
   (c) Jak porovnáte hry $\{1 \mid -1\}$ a $\{2 \mid *\}$? Při porovnání použijte výsledku z 1a.
   (d) Pro řešení 1c použijte také CGSuite. Jaký příkaz použijete?
2. Je dána hra $a = \{2, 3, -2, 3, * \mid 0, \{0, * \mid *\}, *\}$.
   (a) Vypočítejte kanonický tvar hry a. Popište každý krok.
   (b) Spočítejte také kanonický tvar pomocí CGSuite, jaký příkaz použijete?
3. Je dán nim součet $\bullet 3 + \bullet 4 + \bullet 5 + \bullet 6 + \bullet 7$. Nalezněte nim hodnotu! Popište všechny kroky a výsledek zkontrolujte pomocí CGSuite.
4. Je dán nim součet $s = \Sigma_{i=1}^{n} \bullet x_i$, ve kterém vyhraje první hráč (je nenulový). Popište algoritmus, který nalezne vyhrávající strategii a implementujte funkci do CGSuite jako funkci vítězných tahů. Například v součtu $\bullet 5 + \bullet 6 + \bullet 7$ jsou vyhrávajícími tahy odebrání z $\bullet 5$ na $\bullet 1$, z $\bullet 6$ na $\bullet 2$ nebo z $\bullet 7$ na $\bullet 3$.

Úloha 1.25. Porovnejte následující hry:

1. $\{\mid -1\}$ a $\{\mid -1, 0\}$

2. $\{\mid 0,1\}$ a $\{-1\mid 0\}$
3. $\{0,1\mid 2\}$ a $\{-1,0,1\mid 3/2,2\}$.

Úloha 1.26. Nechť $G=\{A,B,C,\dots\mid D,E,F,\dots\}$ a nechť H je stejná hra, ve které ale chybí A. Ukažte:

1. $G\geq H$.
2. Je-li $A\leq B$, potom $G=H$.
3. Je-li A ostře větší než všechny levé části H, platí $G>H$? Nalezněte příklad!

Úloha 1.27. Zjednodušte:

1. $\{2,5/2,11/4,23/8,47/16,\dots\mid 3\}$
2. $\{\mid -3\}$
3. $\{-3\mid -2\}$
4. $\{-2,-1,1/2\mid 2,3\}$
5. $\{\bullet 2+\bullet 6+\bullet 7+\bullet 15\mid\}$
6. $\{0,*,\bullet 3,\bullet 5\mid 0,*,\bullet 3,\bullet 5\}$
7. $\{0,\bullet 2,\uparrow\mid 0,\bullet 3,\downarrow\}$
8. $\{0,*,\uparrow\mid\uparrow,\Uparrow\}$.

Úloha 1.28. Budeme hrát hru Nim v normální variantě. Na hromádkách je $26,19,10,9$ a 7 kamenů. Existuje z této pozice vyhrávající tah? Je-li tomu tak, z které hromádky a kolik kamenů odeberete?

Úloha 1.29. Uvažujme hru Nim$[17,5,12,11]$. Jak odpoví druhý hráč, pokud první hráč odebral 9 kamenů z první hromádky o 17 kamenech?

Úloha 1.30. Nalezněte nimber (nim číslo) $\bullet n$ takové, že

1. $\bullet 7+\bullet n+\bullet 4=0$.
2. Ve hře $\bullet 32+\bullet n+\bullet 5+\bullet 17$ vyhraje druhý hráč.
3. Ve hře $\bullet n+\bullet 21+\bullet 5+\bullet 17$ vyhraje druhý hráč.

Úloha 1.31. Zahrajte si nestrannou hru Nim$[16,17,18,20,24]$.

Úloha 1.32. V betlové variantě řešte hru Nim s 21 kameny, přičemž se může odebírat $1,2$ nebo 3 kameny.

Úloha 1.33. Nalezněte nim součet $12\oplus 21$ a $15\oplus 1\oplus 5$.

Úloha 1.34. Uvažujme následující variantu hry Nim na 4 hromádkách s $48,23,70$ a 10 kameny. V jednom tahu lze odebrat $1,2$ nebo 3 kameny, vždy ale pouze z jedné hromádky. Je tato pozice $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{P}$? Je-li tato pozice $\mathcal{N}$, jaký je nejvýhodnější první tah?

Úloha 1.35. Uvažujme hru Nim se čtyřmi hromádkami s $9,10,11,12$ kameny. Je tato pozice $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{P}$? Nalezněte v této hře první vyhrávající tah.

Úloha 1.36. Hraje se varianta hry Nim, kde povolenými tahy jsou:

1. Není-li n mocnina 2, odebírá se největší mocnina 2 menší než n.
2. Je-li n sudé, odebírá se polovina kamenů.

Kdo vyhraje? A jak hra dopadne v betlové variantě?

Úloha 1.37. V Grundyově hře se jedná o rozložení hromádky na dvě nestejné hromádky. Následující tabulka ukazuje Grundyova čísla $\mathcal{G}(n)$ pro různá n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1

Ověřte, že $\mathcal{G}(13) = 3$ a nalezněte $\mathcal{G}(14)$. Jak se bude hrát s jednou hromádkou o velikosti 13 kamenů? Předpokládejte, že hrajete s hromádkou o velikosti 27, a protihráč zahrál do pozice $13 + 14$. Jak zahrajete? Jak měl váš soupeř zahrát?

Úloha 1.38. Zopakujme, že substrakční hra se substrakční množinou $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ je hra, ve které je jedna hromádky kamenů a pravidly povolenými tahy jsou odebrání tolik kamenů, kolik udává množina S. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci, je-li dáno $S = \{1, 2, 4\}$.

Úloha 1.39. Na počátku hry je dána hromádka s k kameny a množina $S \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Hráč na tahu musí odebrat z hromádky x kamenů, kde $x \in S$.

1. Ukažte, že první hráč má vyhrávající strategii pro $k = 20$ a $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kdo má vyhrávající strategii pro $k = 24$?
2. Ukažte, že první hráč má vyhrávající strategii pro $k = 11$ a $S = \{1, 4, 5\}$. Kdo má vyhrávající strategii pro $k = 16$?
3. Ukažte, že druhý hráč má vyhrávající strategii pro $k = 2016$ a $S = \{1, 4, 5\}$.

Úloha 1.40. Dokažte, že substrakční hra

1. s množinou $S = \{2, 6, 5\}$ má periodu 7.
2. s množinou $S = \{3, 6, 7\}$ má periodu 10.

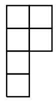
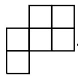
Úloha 1.41. Uvažujme partyzánskou hru s odebíráním kamenů. Na počátku hry je na jedné hromádce 11 kamenů. Levý hráč může odebírat $x \in S_L = \{2, 3, 6\}$ kamenů, pravý $y \in S_R = \{3, 5, 7\}$.

Úloha 1.42. Nechť G je substrakční hra se substrakční množinou S a nechť $\mathcal{G}$ je její Sprague-Grundyova funkce. Uvažujme novou hru H_S se stejnou substrakční množinou S, ve které navíc lze v jednom tahu odebrat všechny kameny. Označme $\mathcal{H}$ Sprague-Grundyovu funkci této nové hry H_S. Ukažte, že $\mathcal{H}(x) = \mathcal{G}(x - 1) + 1 \quad \forall x \geq 1$.

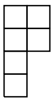
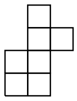
Úloha 1.43. Uvažujme následující nestrannou hru pro dva hráče. Hra začíná na jedné hromádce s n kameny. Hráči se v tazích střídají, v každém tahu mohou odebrat jeden kámen nebo nevlastní dělitel počtu kamenů na hromádce. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

1. Nalezněte Sprague-Grundyovu funkci pro $n \leq 8$ tabulkou.
2. Odhadněte obecně tuto funkci.
3. Hypotézu dokažte.
4. Jaký bude nejvýhodnější tah z konfigurace $(126, 5000, 428)$?

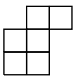
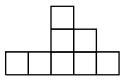
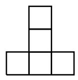
Úloha 1.44. Nechť G je jednohromádková varianta substrakční hry, ve které lze odebrat jeden kámen nebo vlastní dělitele počtu kamenů. Například je-li na hromádce 18 kamenů, lze odebrat $1, 2, 3, 6$ a 9 kamenů. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci této hry. Předpokládejte dále, že na stole leží 18 kamenů. Který z hráčů má vyhrávající strategii a proč?

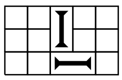
Úloha 1.45. Uvažujme dvě pozice G, H ve hře Domino. $G =$  a $H =$ .

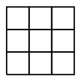
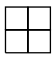
1. Nalezněte hodnoty těchto her.
2. Nalezněte jejich kanonické tvary.
3. Ukažte, že $G > H$ (levý preferuje spíše G než H).

Úloha 1.46. Pro hru Domino ověřte, že dané pozice mají odpovídající hodnotu:
 $= \{2 \mid 0\}$ a  $= \{1* \mid -1*\}$.

Úloha 1.47. Spočtené hodnoty pozic ve hře Domino

 $= \{1/2 \mid -2\}$,  $= \{0 \mid -2\}$,  $= 1/2$.

Úloha 1.48. Ve hře Domino máme:  $= \{1/2 \mid 2\} + \{1 \mid -1\}$. Ověřte a sečtěte.

Úloha 1.49. Jsou hodnoty her Domino  a  stejné?

Úloha 1.50. Určete vyhrávající strategii pro hru Kayles na pěti kuželkách. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci pro substrakční hru s množinou $S = \{2, 3, 6\}$. Hrajte současně obě předcházející hry (součet her).

Úloha 1.51. Nalezněte hodnoty her Ski Jumping (Lyžaři)

				L
R				

,

			L	
		R		

,

	L			
	R			

,

		L		
		R		

,

	L			
			R	

,

L				
	R			

.

Úloha 1.52. Porovnejte $\uparrow*$ a $\bullet 2$. Sečtěte $\uparrow*$ a $\bullet 2$.

Úloha 1.53. Nalezněte fazy interval pro hru $\{1 \mid \uparrow\}$.

Úloha 1.54. Nechť x, y jsou čísla taková, že $x > y \geq 0$. Ukažte, že $⧾_x < ⧾_y$ a odvoďte, že $n⧾_x < ⧾_y$.

Úloha 1.55. Pro libovolnou hru G definujme $⧾_G$ (tiny G) jako $\{0 \mid \{0 \mid -G\}\}$. Ukažte, že $0 < ⧾_G \leq \frac{1}{2}$. Nalezněte G, pro kterou $⧾_G = \frac{1}{2}$. Ukažte, je-li G záporná, potom $⧾_G$ je kladné číslo a toto číslo nalezněte. Je-li G kladná, potom $⧾_G < \uparrow$, kde $\uparrow = \{0 \mid *\}$.

Úloha 1.56. Hry *all-small* jsou definovány tak, že v každé pozici, může-li zahrát jeden z hráčů, může zahrát i druhý a všechny možné tahy jsou do all-small her.

---

[1]TODO: priklad stromecku all-small

Například $\uparrow$ je all-small. Jiný příklad je $\{* \mid \{0 \mid \uparrow\}\}$. Dokažte: Je-li G all-small hra, potom $G < 1$. Odvoďte potom, že $G < x$ pro každé kladné číslo x.

Úloha 1.57. Zjednodušte:

$\uparrow + *$, $\quad \{\uparrow \mid \uparrow\} + \downarrow$, $\quad \{0, *, \bullet 3, \bullet 5 \mid 0, *, \bullet 4, \bullet 6\}$, $\quad 2 + \frown_2$, $\quad \{\downarrow \mid \uparrow\} + \{4 \mid 0\} + \pm 2 + 2*$

Další úlohy lze nalézt na URL: http://86.49.36.65/6sbirka/show_category.php?c=19

[2hs03RMF actual ulohyzadresaresort.tex, 25/10/14, 21:54]