1 Úlohy z adresáře III

Úloha 1.1. Dokažte $\Downarrow < * < \Uparrow$.

Úloha 1.2. Upravte $\uparrow + *$.

Úloha 1.3. Nalezněte den narození her $+_2$, -3, $\{6 \mid \frac{5}{2}\}$ a $-\frac{10}{32}$.

Úloha 1.4. Dokažte strategicky: Je-li $G > 0$ a $H \geq 0$, potom $G + H > 0$.

Úloha 1.5. Nalezněte příklad kladné hry G a fazy hry H takový, aby $G + H$ byla fazy, nebo dokažte, že taková dvojice neexistuje.

Úloha 1.6. Nalezněte (s důkazem) pro dvě hry $G > 0$ a $H < 0$ tak, aby:

1. $G + H = 0$
2. $G + H > 0$
3. $G + H < 0$
4. $G + H \parallel 0$.

Úloha 1.7. Nalezněte (s důkazem) pro nenulové hry $G \parallel H$ a $H \parallel K$ tak, aby:

1. $G = K$
2. $G < K$
3. $G > K$
4. $G \parallel K$.

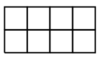
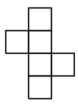
Úloha 1.8. Uvažujme součet dvou her $G + H$. Nalezněte G, H tak, aby $G \parallel 0$ a $H \parallel 0$, tak, aby součet:

1. $G + H = 0$,
2. $G + H > 0$,
3. $G + H > 0$,
4. respektive $G + H \parallel 0$.

Úloha 1.9. Dokažte: $G > H \Rightarrow -_G > -_H$, nebo uveďte protipříklad.

Úloha 1.10. Nechť G, H jsou kladné hry. Píšeme $G \ll H$ právě tehdy a jen tehdy, když $G + G + \cdots + G < H$, pro libovolný konečný počet kopií G. Např. $\uparrow \ll m$ pro každé kladné číslo m. Nechť $n < m$ jsou nezáporná čísla, potom $+_m \ll +_n$. Dokažte.

Důsledek: $\cdots \ll +_3 \ll +_2 \ll +_{\frac{3}{2}} \ll +_1 \ll +_{\frac{1}{2}} \ll +_0 = \uparrow$.

Například ve hře Domino máme:  $\ll$  $\ll$ , protože $+_2 \ll \uparrow \ll 1$.

Úloha 1.11. Hra $\{10 \mid -2\}$ po ochlazení 6 je $\{10 - 6 \mid -2 + 6\} = \{4 \mid 4\} = 4*$.

Úloha 1.12. Je-li $a \geq b \geq c$, potom $\{\{a \mid b\} \mid \{b \mid c\}\} = b$. Dokažte!

Úloha 1.13. Porovnejte následující hry G a H, je-li:

1. $G = 1 + \uparrow$, $H = \frac{1}{2} + 10\uparrow$
2. $G = \uparrow$, $H = \bullet 10$
3. $G = 3\uparrow$, $H = \bullet 10$
4. $G = -\frac{1}{2} + 3\uparrow + \bullet 8$, $H = -\frac{1}{2} + 3\uparrow + \bullet 9$
5. $G = -\frac{1}{2} + 3\uparrow + \bullet 8$, $H = -\frac{1}{2} + 4\uparrow + \bullet 9$
6. $G = -\frac{1}{2} + 3\uparrow + \bullet 5$, $H = -\frac{1}{2} + 4\uparrow + \bullet 6$.

Úloha 1.14. Dokažte: $-\frac{1}{2^p} < * < \frac{1}{2^p}$.

Úloha 1.15. Dokažte, že dyadická racionální čísla jsou hustá v $\mathbb{R}$.

Úloha 1.16. Ve hře ČB Nim nalezněte den narození čísla: þ●●○○○○.

Úloha 1.17. Reálná čísla mají vlastnost Archimedova axiómu.

Nechť ϵ, m jsou kladná reálná čísla. Potom existuje celé číslo n tak, že $\epsilon \cdot n > m$.

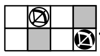
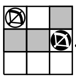
Dokažte, že kombinatorické hry nejsou archimedovská.

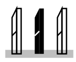
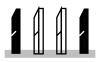
Úloha 1.18. Porovnejte $⧾_3$ a $\uparrow$.

Úloha 1.19. Najděte obecnou formuli dne narození dyadického čísla

$$\tfrac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{ \tfrac{p}{2^n} \;\middle|\; \tfrac{p+1}{2^n} \right\}.$$

Úloha 1.20. Najděte hodnotu $\left\{ \frac{3}{4} \;\middle|\; \frac{63}{64} \right\}$ a $\left\{ \frac{1}{4} \;\middle|\; 3 \right\}$.

Úloha 1.21. Nechť G je hra Amazonky v pozici . Nalezněte její hodnotu! Úlohu řešte i pro pozici .

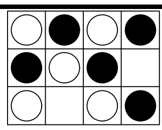
Úloha 1.22. Nalezněte hodnoty hry Padající Domino , .

Úloha 1.23. Nechť $G = \bullet 2 + ⧾_2$. Jaký bude nejlepší první tah levého hráče? Jaký bude nejlepší tah pravého hráče? Jaká je hodnota hry?

Úloha 1.24. Zjednodušte: $\left\{ \frac{1}{2} \;\middle|\; 3\frac{1}{2} \right\}$, $\left\{ -2, -1 \;\middle|\; -\frac{1}{4} \right\}$, $\left\{ 0 \;\middle|\; \frac{3}{4}, 3 \right\}$ $\left\{ -1, 0, 1 \;\middle|\; 2, 2\frac{1}{2} \right\}$.

Úloha 1.25.

(1)TODO: zmensi obr

Zahrajte si hru Konane v postavení !

Úloha 1.26. Reálné číslo tvaru $\frac{m}{2^n}$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$ se nazývá dyadické číslo. Dokažte, že množina všech dyadických čísel je hustá. Využijte archimedovské podmínky.

Úloha 1.27. Sečtěte:

1. $\{1 \mid 2\} + \left\{ -2 \;\middle|\; -1\frac{1}{4} \right\}$

2. $\left\{\frac{1}{2} \mid 2\right\} + \left\{-\frac{1}{2} \mid 0\right\}$
3. $\left\{2\frac{1}{2} \mid 4\frac{1}{2}\right\} + \{-3 \mid -1\}$.

Úloha 1.28. Zjednodušte:

1. $\uparrow + *$
2. $\{\uparrow \mid \uparrow\} + \downarrow$
3. $\{0, *, \bullet 3, \bullet 5 \mid 0, *, \bullet 4, \bullet 6\}$
4. $2 + ⧾_2$
5. $\{\downarrow \mid \uparrow\} + \{4 \mid 0\} + \pm 2 + 2*$.

Úloha 1.29. Ukažte, že právě dyadická čísla mají konečný den narození. Pro každé dyadické číslo nalezněte den narození.

Úloha 1.30. Dokažte $\uparrow + \bullet n > 0 \Leftrightarrow n \neq 1$.

Úloha 1.31. Uvažujme hru Clobber v postavení

pro $n > 4$. Nalezněte hodnoty této hry.

Úloha 1.32. Sečtěte podle definice součtu: $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.

Úloha 1.33. Vynásobte podle definice násobení $2 \cdot 2$.

Úloha 1.34. Nalezněte hodnoty her Lyžaři

L			
	R		
			L

a

L			
		R	

Úloha 1.35. Nalezněte hodnoty hry Žáby v postavení:

T		T	F

.

Úloha 1.36. Dokažte: Každé kladné celé číslo má jednoznačně určený binární rozvoj.

Úloha 1.37. Dokažte $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Zobecněte tento vztah na výraz $b + b^2 + \cdots + b^k$.

Úloha 1.38. Nalezněte strom hry Chomp! na 2×3 polí. Nalezněte hodnoty všech pozic.

Úloha 1.39. Nalezněte hodnoty všech políček 5×5 ve hře Wythoffova Královna.

Úloha 1.40. Použijte větu o nejstarším prvku k nalezení hodnot her $\{1, 0 \mid 10\}$ a $\{1 \mid\} = 2$.

Úloha 1.41. Uvažujme následující partyzánské hry $A = \left\{\frac{3}{8} \mid 1\right\}$, $B = \left\{-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2}\right\}$, $C = \left\{\frac{1}{16} \mid \frac{1}{2}\right\}$ a $D = \left\{0 \mid \frac{3}{4}\right\}$.

1. Ukažte, že všechny čtyři hry jsou čísla. Podle věty o nejstarším prvku nalezněte jejích hodnoty. Ukažte, že $A + B + C + D > 0$.
2. Ve které komponentě zahraje levý hráč svůj první tah, začíná-li. Nalezněte všechny možnosti.

3. Předpokládejte, že levý zahrál ve hře D. Ve které komponentě zahraje potom pravý hráč?

Úloha 1.42. Nalezněte hodnoty hry $G = \left\{-\frac{13}{16} \;\middle|\; -\frac{5}{8}\right\}$. Použijte větu o nejstarším prvku. Nalezněte výšku stromu hry G.

Úloha 1.43. Použijte větu o nejstarším prvku a nalezněte hodnoty:

1. $\left\{3 \;\middle|\; 5\frac{1}{2}\right\}$
2. $\left\{-1 \;\middle|\; -\frac{1}{4}\right\}$
3. $\left\{0 \;\middle|\; \frac{3}{4}\right\}$
4. $\left\{1 \;\middle|\; 3\frac{1}{2}\right\}$
5. $\left\{\frac{1}{4} \;\middle|\; \frac{5}{8}\right\}$
6. $\left\{-2, -1 \;\middle|\; \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Úloha 1.44. Kdo vyhraje v betlové variantě hry Nim na třech hromádkách s $1, 2$ a 5 kameny?

Úloha 1.45. Ve hře Nim nalezněte všechny vyhrávající tahy v pozicích $(12, 18, 27)$ a $(13, 17, 19, 23)$. Úlohu řešte také v její betlové variantě.

Úloha 1.46. Hraje se betlový Nim. Pro každou pozici nalezněte první optimální tah v pozicích Nim$[5, 6, 7, 8, 9]$, Nim$[4, 6, 8, 10]$ a Nim$[1, 1, 1, 4]$.

Úloha 1.47. Nalezněte všechny vyhrávající tahy ve hře Nim

1. se třemi hromádkami s $12, 19$ a 27 kameny.
2. se 4 hromádkami $13, 17, 19$ a 23 kameny. Věnujte se také betlové variantě.

Úloha 1.48. Zahrajte si hru Hromádky na $7, 8, 9, 10$ kamenech s dodatečnou podmínkou, odebírá se pouze nejvýše tři kameny z jedné hromádky.

Úloha 1.49. Určete $2 \oplus 6 \oplus 7$, $3 \oplus 4 \oplus 9$.

Úloha 1.50. Kdo vyhraje a jak v pozicích Nim$[5, 6, 7]$ a Nim$[20, 10, 19, 13]$?

Úloha 1.51. Hladový Nim je Nim, ve kterém je povoleno odebírat pouze z větší hromádky (s větším počtem kamenů). Pokud je takových hromádek více, tak z libovolné z nich. Charakterizujte $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.52. Uvažujme hru Nim s dodatečným pravidlem, které umožňuje odebírat jeden kámen, nebo prvočíselný počet kamenů (Prvočíselný Nim).

1. Nalezněte Grundyovy hodnoty $\mathcal{G}(P_n)$, kde je n kamenů na hromádce P_n, kde $0 \leq n \leq 8$.
2. Vyslovte pravidlo pro hodnoty $\mathcal{G}(P_n)$.
3. Pravidlo dokažte.
4. Nalezněte vyhrávající tah v pozici se třemi hromádkami $(100, 50, 25)$.

Úloha 1.53. Ve hře Nim nalezněte všechny tahy do $\mathcal{P}$ pozic, jsou-li pozice:

1. Nim$[1, 1, 3, 5, 9, 18]$
2. Nim$[7, 7, 8, 8, 9, 9]$

3. $\textsc{Nim}[1, 2, 4, 16, 32, 64]$
4. $\textsc{Nim}[1, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15]$
5. $\textsc{Nim}[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]$.

Úloha 1.54. Hraje se hra s odčítáním, $S = \{1, 2, 4\}$. Předpokládáme, že hra začíná na dvou hromádkách se 3 a 8 kameny. Jak zahraje první hráč?

Úloha 1.55. Pro každou následující pozici nalezněte jeden dobrý tah pro prvního hráče, pokud existuje.

1. $\textsc{Nim}[5, 7, 8]$,
2. $\textsc{Nim}[3, 4, 8, 9]$,
3. $\textsc{Nim}[3, 5, 10, 12]$,
4. $\textsc{Nim}[1, 6, 8, 9, 10]$.

Úloha 1.56. Ve hře $\textsc{Nim}[5, 7, 9, m]$ druhý hráč vyhraje. Nalezněte m. Totéž řešte pro pozici $\textsc{Nim}[15, 20, 7, m]$.

Úloha 1.57. Nalezněte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice ve hře Nim, je-li

1. $\textsc{Nim}[10, 15, 17, 19]$,
2. $\textsc{Nim}[7, 14, 17, 24]$,
3. $\textsc{Nim}[19, 18, 5, 11]$.

Úloha 1.58. Nalezněte všechny dobré první tahy:

1. $\textsc{Nim}[5, 7, 10, 13, 17]$,
2. $\textsc{Nim}[5, 14, 15]$,
3. $\textsc{Nim}[11, 12, 13, 14, 15]$.

Úloha 1.59. Analyzujte hru s odčítáním, ve které je možné odebírat třetí mocniny. Nalezněte Grundyovy hodnoty.

Úloha 1.60. Řešte Grundyovu hru na hromádkách $(10, 11, 12)$ a $(8, 9, 10, 13)$.

Úloha 1.61. Řešte Laskerův Nim na hromádkách 7, 11, a 15 kamenů.

Úloha 1.62. Připomeňme, že ve hře Čtvercový Nim jsou pozice

$$0, 2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, 20, 22, 34$$

nulové. Najděte tuto posloupnost v databázi OEIS.org (Otevřená encyklopedie posloupnosti, N. Sloane), `http://oeis.org/`. Uměli byste dokázat zde uvedená tvrzení o této posloupnosti?

Úloha 1.63. Jaká je hodnota $1 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus n$?

Úloha 1.64. Ve hře $\textsc{Nim}[1, 2, 3, \ldots, 63]$ najděte vyhrávající tah.

Úloha 1.65. Nakreslete graf hry s odčítáním, $n = 10$, $S = \{1, 2, 5\}$.

1. Nalezněte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice.
2. Nalezněte příslušné Grundyovy hodnoty

3. Je Grundyova posloupnost periodická? Dokažte! Jakou má periodu?

Úloha 1.66. Hraje se na jedné hromádce s n kameny. Je-li n liché, levý hráč může odebrat 1 kámen a pravý může odebrat 2 kameny. Je-li n sudé, levý může odebrat dva kameny a pravý může odebrat jeden kámen. Nalezněte hodnoty hry pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 1.67. Hraje se hra s odčítáním na 4 hromádkách s $9, 10, 11$ a 12 kameny. V jednom tahu lze odebrat z jedné hromádky až 9 kamenů. Analyzujte hru.

Úloha 1.68. Nalezněte Grundyovu posloupnost hry s odčítáním, je-li $S = \{1, 4\}$.

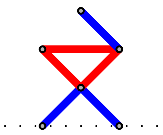
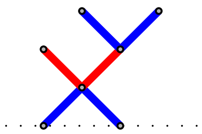
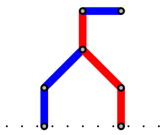
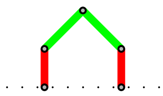
Úloha 1.69. Jaký je optimální tah z pozice $\bullet 3 + \bullet 4 + \bullet 9$?

Úloha 1.70. Hra Kuželky (Kayles) se někdy hraje tak, že je možné položit pouze dvě vedle sebe stojící kuželky. S osamělými a položenými kuželkami se již dále nehraje. Této variantě se říká Dawson's Kayles. Ukažte, jak můžete použít symetrii při řešení Dawsonových kuželek.

Úloha 1.71. Triple Kayles se hraje jako obvyklé Kuželky až na to, že je možné v jednom tahu shodit tři sousední kuželky.

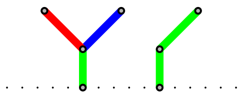
Úloha 1.72. Hra Kayles začíná na 13 kamenech, v postavení $(1) + (11)$. Může si první hráč vynutit vítězství? Pokud ano, nalezněte množinu všech prvních tahů.

Úloha 1.73. Ve hře Hackenbush nalezněte hodnoty:

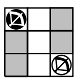

$= \frac{3}{4}$

$= \frac{7}{8}$



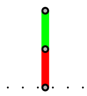
Úloha 1.74. Dokažte, že hra Hackenbush, kde jsou pouze červené a modré tyčinky, má vždy číselnou hodnotu.

Úloha 1.75. Nalezněte první dobrý tah ve hře RGB Hackenbush



Úloha 1.76. Porovnejte hru Amazonky a hru RGB Hackenbush:



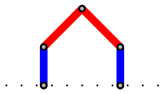


[2]TODO: dopln spise lezaci hack

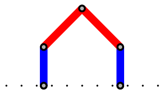
Úloha 1.77. Nakreslete alespoň dvě pozice hry HACKENBUSH s hodnotou $1\frac{1}{4}$.

Úloha 1.78. Nalezněte hodnotu hry HACKENBUSH na obrázcích

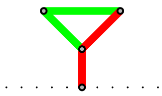
Úloha 1.79. Nalezněte hodnotu hry HACKENBUSH v postavení



Úloha 1.80. Nalezněte hodnotu hry HACKENBUSH pro obrázek

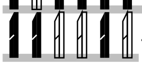


Úloha 1.81. Nalezněte hodnoty hry HACKENBUSH pro pozici



Úloha 1.82. Najděte kanonické tvary her $\uparrow *, \downarrow *, \Uparrow, \Downarrow, \Uparrow *, \Downarrow *$. Připomeňme, že $\Uparrow = \uparrow + \uparrow$, $\Uparrow * = \uparrow + \uparrow + *$ a $\uparrow * = \uparrow + *$.

Úloha 1.83. Nalezněte kanonický tvar hry PADAJÍCÍ DOMINO v konfiguracích:

1. 
2. .

Úloha 1.84. Hraje se hra CLOBBER. Analyzujte následující pozici a výsledek napište v kanonickém tvaru:

.

Úloha 1.85. Nalezněte kanonické tvary $\uparrow + *$, $\uparrow + \bullet 2$, $\uparrow + \bullet 3$, $\uparrow + \bullet 4$ a $\uparrow + \bullet 5$.

Úloha 1.86. Nalezněte kanonický tvar $2 + *$.

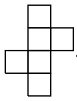
Úloha 1.87. Nalezněte výsledkovou třídu (tj. jak hra dopadne) hry $\{-1* \mid 2, *\}$. Nalezněte opačnou hru a její kanonický tvar.

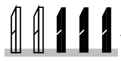
Úloha 1.88. Nalezněte kanonický tvar $\uparrow + \bullet 2$.

Úloha 1.89. Najděte kanonickou hodnotu následujících her:

1. Pro $a < 0$; $\quad \pm a \pm a$
2. $\{0, *, \bullet 3 \mid 0, *, \bullet 3\}$
3. $\{0, * \mid 0, *\} + \{0, *, \bullet 2 \mid 0, *, \bullet 2\}$.

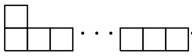
4. $\{0, -1 \mid *, 4\}$.

Úloha 1.90. Uvažujme následující pozici ve hře . Nakreslete kompletní herní strom jak pro hru DOMINO, tak pro hru CRAM. Listy stromu by měly být všechny pozice, ve kterých ani jeden z hráčů nemůže táhnout. Kdo vyhraje DOMINO, začíná-li levý? Kdo vyhraje DOMINO, začíná-li pravý? Kdo vyhraje CRAM?

Úloha 1.91. Řešte PADAJÍCÍ DOMINO v pozici .

Úloha 1.92. Analyzujte hru DOMINO na 5×5 políčkách.

Úloha 1.93. Nalezněte hodnotu hry DOMINO, je-li

.

Své tvrzení dokažte!

[2hs03RMF actual ulohyzadr3.tex, 30/03/15, 19:16]