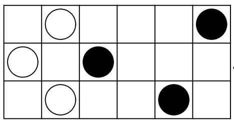
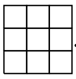
Úloha 0.1. Zahrajte si NORTHCOTTOVU hru v této pozici:

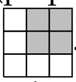
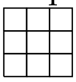
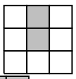
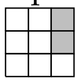
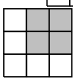
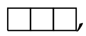
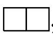
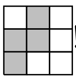
$G =$  .

Úloha 0.2. (NORTHCOTTOVA HRA.) (Tato hra sice není nestrannou, ale může se analyzovat jako nestranná): Základní postavení: Hra je se na šachovnici s bílými a černými pěšci, v každém řádku je po jednom černým a jednom bílým pěšci. Bílý hráč tahá s bílými figurami, černý s černými. Hráči se v tazích střídají. Pravidla: Pěšci mohou táhnout vpřed i vzad, ale nesmí se přeskakovat. Musíte přesunout jednu z vašich figurek na jiné volné místo v téže řadě. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který táhne jako poslední. (Návod: Všimněte si políček mezi kameny!) tato hraje variantou hry AUTOBUS.

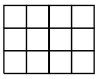
Úloha 0.3. Levý a pravý hráč hrají hru CRAM na šachovnici 3×3 polí, na barvě polí nezáleží.

 .

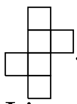
Bez ztráty na obecnosti budeme předpokládat, že začíná levý hráč.

1. Vysvětlete, proč (po prvním tahu levého) pravý může vždy (až na symetrii) zahrát do pozice  .
2. Může levý hráč v této pozici vyhrát?
3. Odpovězte na otázku, zda výchozí pozice je $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{P}$ pozicí. Z pozice  je možné zahrát prvním tahem do pozic  nebo  a druhý hráč dotáhne požadovaným způsobem. Pozice  je $\mathcal{P}$ pozice, levý hráč prohraje, jsou možné (až na symetrii) dva možné tahy, buď do , nebo do  , kde existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Vyšetřete i možnost  !

Úloha 0.4. Levý a pravý hráč hrají hru CRAM na šachovnici 3×4 políček.

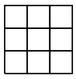


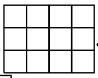
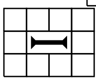
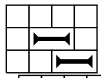
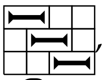
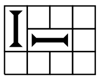
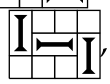
Levý hráč začíná. Ilustrujte, kam levý hráč umístí svoji první kostku domina a jak odpoví pravý hráč.

Úloha 0.5. Uvažujme následující pozici ve hře  . Nakreslete kompletní herní strom jak pro hru DOMINO, tak pro hru CRAM. Listy stromu by měly být všechny pozice, ve kterých ani jeden z hráčů nemůže táhnout. Kdo vyhraje DOMINO, začíná-li levý? Kdo vyhraje DOMINO, začíná-li pravý? Kdo vyhraje CRAM?

Úloha 0.6. Uvažujme hru CRAM A DOMINOVÉ DLÁŽDĚNÍ pro tabulku velikosti $n \times m$.

1. Jak hra dopadne, když jsou n i m sudá?
2. Jak hra dopadne, když je právě jedno z čísel n a m liché?

Úloha 0.7. Vyšetřete ještě počáteční pozici ve hře CRAM 

Úloha 0.8. Vyšetříme ještě hru CRAM: . První hráč může položit kostku domina „doprostřed“ šachovnice: . Potom, ať druhý hráč zahraje jakkoliv, první hráč může vytvořit symetrický tah a vyhraje. Například na tah  by odpověděl tahem do pozice , na tah  by byl optimální tah , a pod. Tedy počáteční pozice je $\mathcal{P}$.

Úloha 0.9. V betlové variantě řešte hru NIM s 21 kameny, přičemž se může odebírat $1, 2$ nebo 3 kameny.

Úloha 0.10. Hraje se varianta hry NIM, kde povolenými tahy jsou:

1. Není-li n mocnina 2, odebírá se největší mocnina 2 menší než n.
2. Je-li n sudé, odebírá se polovina kamenů.

Kdo vyhraje? A jak hra dopadne v betlové variantě?

Úloha 0.11. Kdo vyhraje v betlové variantě hry NIM na třech hromádkách s $1, 2$ a 5 kameny?

Úloha 0.12. Ve hře NIM nalezněte všechny vyhrávající tahy v pozicích $(12, 18, 27)$ a $(13, 17, 19, 23)$. Úlohu řešte také v její betlové variantě.

Úloha 0.13. Hraje se betlový NIM. Pro každou pozici nalezněte první optimální tah v pozicích NIM$[5, 6, 7, 8, 9]$, NIM$[4, 6, 8, 10]$ a NIM$[1, 1, 1, 4]$.

Úloha 0.14. Nalezněte všechny vyhrávající tahy ve hře NIM

1. se třemi hromádkami s $12, 19$ a 27 kameny.
2. se 4 hromádkami $13, 17, 19$ a 23 kameny. Věnujte se také betlové variantě.

Úloha 0.15. Hra s odčítáním: množina $S = \{1, 2, 3\}$, $n = 21$. Najděte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice. Použijte zpětnou indukci. Úlohu řešte i pro její betlovou variantu. Úlohu zobecněte na substrakční hru se substrakční množinou $S = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Úloha 0.16. Na stole leží hromádka n kamenů. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V každém tahu buď

1. pokud počet kamenů k na hromádce není mocnina 2, lze odstranit nejvyšší mocninu 2 menší jak k, nebo
2. pokud je počet kamenů k sudý, lze odstranit polovinu kamenů.

Kdy vyhraje první (druhý) hráč? Uvažujte normální (nebo betlovou) variantu hry.

Úloha 0.17. Betlová varianta hry s odčítáním. $S = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n\}$. Hráč, který udělá poslední tah, prohrál. Cílem hry je donutit protihráče udělat poslední tah (vzít poslední kámen). Analyzujte tuto hru a nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 0.18. Betlový NIM: Zahrajte si betlový NIM s množinou $S = \{1, 2, 3\}$ na hromádce s 15 kameny.

Úloha 0.19. (11 ZÁPALEK.) Na stole je 11 zápalek (nebo jiných předmětů). První hráč odebírá jednu, dvě nebo tři zápalky. Druhý hráč odebírá stejný počet. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který odebere poslední zápalku prohrává (betlová varianta).

1. Může první hráč vyhrát? (Bez ohledu na možné tahy druhého hráče.)
2. A co když je na stole 30 zápalek místo 11?
3. Úlohu řešte obecně, tj. pro n kamenů a v jednom tahu je možné odebrat p zápalek.

Úloha 0.20. WYTHOFFŮV NIM. Zahrajte si hru z počáteční pozice $(14, 15)$.

Úloha 0.21. Nalezněte hodnoty všech políček 5×5 ve hře WYTHOFFOVA KRÁLOVNA.

Úloha 0.22. Ve WYTHOFFOVĚ HŘE na 8×8 políčkách najděte Sprague–Grundyovy hodnoty.

Úloha 0.23. WYTHOFFOVA KRÁLOVNA. Množina dovolených tahů je stejná jako u hry NIM a nebo hráč ve svém tahu může odebrat stejný nenulový počet kamenů $(i = j \neq 0)$ současně z obou hromádek. Hru analyzujte na šachovnici 7×7.

Úloha 0.24. (WYTHOFFOVA HRA.) Základní postavení: Dvě hromádky s m, n mincemi. Hráči se v tazích střídají. Pravidla: Na tahu můžete odstranit libovolný počet mincí z jedné hromádky, nebo stejný počet mincí z obou hromádek současně. Vyhrává hráč, který odebere poslední minci. (Nalezněte vzorec pro vítězné pozice v této hře! Sprague–Grundy posloupnost je periodická. Úlohu řešte pro postavení (16,23).) Pozn. hru je možné zobecnit např. tak, že se mince mohou odebírat ze tří, popř. ze všech hromádek současně.

Úloha 0.25. Zopakujme, že substrakční hra se substrakční množinou $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ je hra, ve které je jedna hromádky kamenů a pravidly povolenými tahy jsou odebrání tolik kamenů, kolik udává množina S. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci, je-li dáno $S = \{1, 2, 4\}$.

Úloha 0.26. Nechť G je jednohromádková varianta substrakční hry, ve které lze odebrat jeden kámen nebo vlastní dělitele počtu kamenů. Například je-li na hromádce 18 kamenů, lze odebrat $1, 2, 3, 6$ a 9 kamenů. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci této hry. Předpokládejte dále, že na stole leží 18 kamenů. Který z hráčů má vyhrávající strategii a proč?

Úloha 0.27. Dokažte, že v substrakční hře $S = \{1, 2, 3, 4\}$ jsou $\mathcal{P}$ pozice násobky pěti.

Úloha 0.28. Zahrajme si substrakční hry s $S_1 = \{1, 3, 5\}$ a $S_2 = \{1, 3, 6\}$.

1. Předpokládejte, že jsou dány dvě hromádky a nalezněte pravidlo pro každou hromádku. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice pro dvouhromádkouvou variantu.
2. Zahrajte si opět dvouhromádkovou variantu, na jedné je možné odebírat z množiny S_1 a z druhé z množiny S_2.

Úloha 0.29. Uvažujme substrakční hru, kde $n = 13$ a substrakční množina je $\{1, 2, 4\}$.

1. Nakreslete strom hry.
2. Označte pozice $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$.
3. Který z hráčů vyhraje a proč?

Úloha 0.30. Analyzujte a najděte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice pro hry s odčítáním se substrakční množinou S, je-li

1. $S = \{1, 3, 4\}$
2. $S = \{2, 4, 7\}$
3. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
4. $S = \{1, 3, 5, 7\}$
5. $S = \{1, 3, 6\}$
6. $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} =$ všechny mocniny 2.

Ve všech těchto hrách uvažujte počáteční číslo $n = 100$ a zjistěte, který z hráčů vyhraje — první, či druhý.

Úloha 0.31. Dva hráči hrají hru s odebíráním kamenů, $S = \{2, 5, 6\}$ na třech hromádkách $7, 8, 9$ kamenů. Kdo vyhraje tuto hru? Jaký je nejlepší první tah?

Řešení: 00110213021 s periodou 11. Tedy na těchto hromádkách $7, 8, 9$ kamenů kamenů, dostaneme $\bullet 3 + \bullet 0 + \bullet 2 = \bullet 1$ a tedy existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Jako nejlepší tah je odebrání 2 kamenů z hromádky o velikosti 7, protože potom dostaneme $\bullet 2 + \bullet 0 + \bullet 2 = \bullet 0 = 0$.

Úloha 0.32. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 4, 7, 8\}$. Jakou periodu má tato posloupnost?

Řešení:

Úloha 0.33. Uvažujme substrakční hru $S = \{1, a\}$, pro sudé $a > 1$.

1. Nalezněte invarianty popisující $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice v této hře.
2. Nalezněte vyhrávající tah pro prvního hráče ve hře $S = \{1, 304\}$, pro $n = 2133$.

Úloha 0.34. Nechť G_1, G_2 a G_3 jsou substrakční hry s množinami $S_1 = \{1, 3, 4\}$, $S_2 = \{2, 4, 6\}$ a $S_3 = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Kdo má vyhrávající strategii ve hře $G_1 + G_2 + G_3$ z počáteční pozice $[100, 100, 100]$?

Úloha 0.35. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 3, 6, 8\}$. Jaká je perioda této posloupnosti?

Odpověď: 14

Úloha 0.36. Nechť a, b jsou celá kladná čísla. Uvažujme substrakční hru, ve které je jedna hromádka n kamenů a hráči mohou odebírat buď a nebo b kamenů z hromádky. Nalezněte Grundyovu posloupnost (nim posloupnost). Je tato posloupnost periodická? Nalezněte její periodu, v případě, že odpovíte ano.

Odpověď: $a + b$

Úloha 0.37. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 7, 8\}$. Jaká je perioda této posloupnosti?

Úloha 0.38. Dva hráči hrají substrakční hru $S = \{2, 7, 8\}$ na dvou hromádkách s 11 a 13 kameny. Jaký je vyhrávající tah prvního hráče?

Úloha 0.39. Dva hráči hrají substrakční hru $S = \{2, 5, 6\}$ se třemi hromádkami $7, 8$ a 9 kamenů. Kdo ve hře vyhraje? A proč?

Úloha 0.40. Dva hráči hrají hru s odečítáním, $S = \{2, 7, 8\}$, na dvou hromádkách s 11 a 13 kameny. Jaký je první vyhrávající tah? Najděte Grundyovu posloupnost. Jaká je perioda této posloupnosti?

Úloha 0.41. Uvažujme hru s odečítáním, $S = \{2, 3, 5\}$. Nalezněte Grundyovu posloupnost a ukažte, že její perioda je 7.

Úloha 0.42. Uvažujme hru s odečítáním, $S = \{3, 6, 7\}$. Nalezněte Grundyovu posloupnost a ukažte, že její perioda je 10.

Úloha 0.43. Nalezněte Grundyovu hodnotu $\mathcal{G}(5)$ hry s odečítáním $S = \{1, 2, 4\}$,

1. Uvažujme hru s odečítáním, množina $S = \{2, 3, 4, 5\}$ na hromádce s 15 kameny.
   (a) Nalezněte strom hry.
   (b) Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice.
   (c) Kdo vyhraje na hromádce se 100 kameny?
2. Dva hráči hrají hru s odečítáním, množina $S = \{2, 5, 6\}$. Kdo ve hře vyhraje? Jaký je optimální tah prvního hráče?
3. Nalezněte nim posloupnost pro hru s odečítáním, $S = \{2, 4, 7, 8\}$. Jaká je perioda této nim posloupnosti?

1. Uvažujme hru s odčítáním $S = \{2, 3, 5\}$. Ukažte, že Sprague–Grundyova posloupnost je periodická s periodou 7.
2. Uvažujme hru s odčítáním $S = \{3, 6, 7\}$. Ukažte, že Sprague–Grundyova posloupnost je periodická s periodou 10.

Úloha 0.44. Hraje se hra s odčítáním, $S = \{1, 2, 4\}$. Předpokládáme, že hra začíná na dvou hromádkách se 3 a 8 kameny. Jak zahraje první hráč?

Úloha 0.45. Analyzujte hru s odčítáním, ve které je možné odebírat třetí mocniny. Nalezněte Grundyovy hodnoty.

Úloha 0.46. Nalezněte Grundyovu posloupnost hry s odčítáním, je-li $S = \{1, 4\}$.

Úloha 0.47. Hry s odčítáním: Najděte Sprague–Grundyovu posloupnost pro hru s odčítáním s množinou S, kde

1. $S = \{1, 3, 4\}$
2. $S = \{1, 3, 6\}$
3. $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} =$ mocniny 2.

Úloha 0.48. Nalezněte Sprague–Grundyovy hodnoty hry s odčítáním, je-li $S = \{1, 3, 6\}$ nebo $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ (mocniny 2). Své závěry dokažte!

Úloha 0.49. (Hra s odčítáním) Hra s odčítáním bude mít tato pravidla: Je-li na hromádce sudý počet kamenů, může se odebrat $1, 2, 68, 237$ nebo 250 kamenů. Je-li počet lichý, lze odebrat $1, 5, 7, 236$ nebo 249 kamenů z hromádky. Ukažte, že je-li na počáteční hromádce sudý počet kamenů, potom se jedná o $\mathcal{N}$ pozici. (Použijte vhodné párování.)

Úloha 0.50. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost s odčítáním, kde $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj závěr dokažte!

Úloha 0.51. (Partyzánská varianta hry s odčítáním) Uvažujme hru s odečítáním, první hráč může odebírat $1, 3$ nebo 4 kameny, druhý hráč může odebírat $1, 2$ kameny. Nalezněte všechny vyhrávající pozice pro prvního hráče. Svůj závěr dokažte!

Úloha 0.52. Dva hráči hrají hru s odčítáním s množinou $S = \{2, 5, 6\}$ na třech hromádkách s $7, 8$ a 9 kamenů. Kdo hru vyhraje? Jaký je nejlepší tah prvního hráče?

Odpověď: První hráč odebere 2 kameny z hromádky o 7 kamenech.

Úloha 0.53. Na počátku hry je dána hromádka s k kameny a množina $S \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Hráč na tahu musí odebrat z hromádky x kamenů, kde $x \in S$.

1. Ukažte, že první hráč má vyhrávající strategii pro $k = 20$ a $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kdo má vyhrávající strategii pro $k = 24$?
2. Ukažte, že první hráč má vyhrávající strategii pro $k = 11$ a $S = \{1, 4, 5\}$. Kdo má vyhrávající strategii pro $k = 16$?
3. Ukažte, že druhý hráč má vyhrávající strategii pro $k = 2016$ a $S = \{1, 4, 5\}$.

Úloha 0.54. Uvažujme partyzánskou hru s odebíráním kamenů. Na počátku hry je na jedné hromádce 11 kamenů. Levý hráč může odebírat $x \in S_L = \{2, 3, 6\}$ kamenů, pravý $y \in S_R = \{3, 5, 7\}$.

Úloha 0.55. Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice ve hře s odčítáním, kde $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj odhad dokažte!

Řešení: $n \equiv 0, 2 \pmod 9$.

Úloha 0.56. Zahrajte si hru s odčítáním, je-li dáno $n = 24$ a S je množina

1. $S = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $S = \{1, 2, 7\}$.

Úloha 0.57. Hraje se hra s odčítáním, $S = \{2, 5, 6\}$, na třech hromádkách se $7, 8$ a 9 kameny. Kdo ve hře vyhraje a jak bude hrát?

Úloha 0.58. Najděte periodu hry s odčítáním, kde $S = \{2, 4, 7, 8\}$.

Úloha 0.59. Hraje se hra s odčítáním na 4 hromádkách s $9, 10, 11$ a 12 kameny. V jednom tahu lze odebrat z jedné hromádky až 9 kamenů. Analyzujte hru.

Úloha 0.60. (Bachetova hra) Na stole leží n kamenů. Dva hráči se střídají v tazích, v každém tahu odeberou $1, 2, \ldots, k$ kamenů. Vítězem je hráč, který odebral poslední kámen. Pro které hodnoty k, n má vyhrávající strategii první hráč?

Úloha 0.61.

1. (BACHETOVA HRA) Na hromádce je 100 kamenů, v každém tahu je možné odebrat 1 až 5 kamenů. Hráči se v tazích střídají a hráč, který odebere poslední kámen, prohrál. Nalezněte vyhrávající strategii pro prvního hráče.
2. K dispozici je několik hromádek kamenů a hra se hraje podobně, jako předešle. Hráč na tahu si vybere jednu z hromádek a z ní odebere 1 až 5 kamenů. Nalezněte vyhrávající strategii, pokud hráč, který odebere poslední kámen a) vyhrál, b) prohrál.

Úloha 0.62. BACHETOVA ÚLOHA.[1] Dva hráči pokládají na střed stolu jeden až deset kamenů. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který dovrší počet kamenů na 100, vyhrál.

Úloha 0.63. (BACHETOVA HRA.) Hra začíná číslem 4. Jedním tahem je možné přičíst libovolné menší přirozené číslo. Hráči se v tazích střídají. Vyhraje hráč, který dosáhne číslo 1000.

Úloha 0.64. Uvažujme pozici ve hře NIM$[22, 19, 14, 11]$. Je tato pozice vyrovnaná (tj. má nim součet 0)? Předpokládejme, že třeba první hráč odebral 6 kamenů z druhé hromádky. Jak odpoví druhý hráč?

Řešení:

```
        22=16+4+2=  10110
        19=16+2+1=  10011
        14=8+4+2 =  01110
\oplus  11=8+2+1 =  01011
                   (00000)_2 \ldots nulová pozice (vyrovnaná, bezpečná, s
```

Po odebrání 6 kamenů zůstane

```
        22         = 10110
        13=8+4+1   = 01101
        14         = 01110
\oplus  11         = 01011
                    (11110)_2
```

[1]C. G. Bachet, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, 1612

```
        22        = 10110
\oplus              11110
                  (01000)_2 = 8
```

Druhý hráč odebere z první hromádky $22 - 8$ kamenů.

Úloha 0.65. Dva hráči hrají NIM. Uvažujme pozici NIM$[3, 7, 10, 11]$.

1. Jaká je hodnota této pozice?
2. Jaký je první vyhrávající tah?

Řešení: •5. Vyhrávající tah je odebrání pěti kamenů z druhé hromádky.

Úloha 0.66. Hraje se hra NIM (v normální variantě) v počáteční pozici NIM$[26, 19, 10, 9, 7]$. Existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče? Kolik nejvíce kamenů lze odebrat?

Úloha 0.67. Nalezněte vyhrávající tah v následujících NIM hrách, nebo ukažte, že druhý hráč má vyhrávající strategii, je-li:

1. NIM$[10, 10]$
2. NIM$[8, 9, 10]$
3. NIM$[16, 23, 1, 1, 5]$
4. NIM$[4, 6, 2, 2, 5]$.

Úloha 0.68. (hra NIM) Nalezněte, který z hráčů má vyhrávající strategii v následujících hrách. Následující, či předcházející hráč?

1. NIM$[0]$ (bez hromádky a bez kamenů).
2. NIM$[1]$, NIM$[2]$,. . . , NIM$[n]$ ($n \in \mathbb{N}$).
3. NIM$[1]$+NIM$[1]$=NIM$[1, 1]$ (dvě hromádky po jednom kamenu), NIM$[n, n]$ (dvě hromádky se stejným počtem kamenů) ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
4. NIM$[3, 5]$ (dvě hromádky se třemi a pěti kameny), NIM$[m, n]$ (dvě nestejné hromádky $m \neq n$).
5. Jaký můžete udělat závěr pozorování pro vyhrávající strategie hry NIM s nejvíce dvěma hromádkami?
6. NIM$[3, 5, 8]$ (tři hromádky se 3, 5 a 8 kameny).

Úloha 0.69. (prvočíslený NIM) Uvažujme hru NIM s dodatečnou podmínkou, že se může odebrat jeden kámen, nebo prvočíselný počet kamenů.

1. Nalezněte Grundyovy hodnoty pro hromádku NIM$[n]$ s n kameny, $0 \leq n \leq 10$.
2. Vyslovte hypotézu pro hodnoty $\mathcal{G}(n)$ pro libovolné n.

3. Dokažte vaši hypotézu.
4. Nalezněte vyhrávající tah z pozice NIM$[73, 121, 33]$

Úloha 0.70. Najděte, zda následující pozice ve hře NIM na několika hromádkách je $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$ pozice, je-li:

1. NIM$[2, 4, 6]$
2. NIM$[1, 5, 6]$
3. NIM$[1, 8, 9]$
4. NIM$[2, 3, 4, 5]$
5. NIM$[1, 3, 5, 7]$
6. NIM$[25, 43, 50]$
7. NIM$[10, 20, 30, 40]$
8. NIM$[12, 27, 39, 48]$.

Úloha 0.71. Dokažte, že následující tvrzení pro hru NIM.

1. NIM$[1, n, n + 1]$ je $\mathcal{N}$ pozice právě a jen tehdy n je liché.
2. NIM$[n, 7 - n, 7]$ je $\mathcal{P}$ pozice (pro $n \leq 7$).
3. Pokud NIM$[a, b, c]$ je $\mathcal{P}$ pozice, potom také NIM$[2a, 2b, 2c]$ a NIM$[2a + 1, 2b + 1, 2c]$ je také $\mathcal{P}$ pozice.
4. Pozice NIM$[0, n, n]$, NIM$[1, 2, 3]$, NIM$[1, 4, 5]$, NIM$[1, 6, 7]$, NIM$[2, 4, 6]$, NIM$[2, 5, 7]$, NIM$[3, 4, 7]$, NIM$[3, 5, 6]$ jsou $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 0.72. Nalezněte všechny vyhrávající tahy v pozicích: NIM$[10, 17, 25]$, NIM$[12, 19, 27]$, NIM$[25, 46, 50]$, NIM$[29, 29, 18]$, NIM$[93, 29, 74]$, NIM$[47, 99, 181]$, NIM$[13, 17, 19, 23]$.

Úloha 0.73. Hra NIM s omezenou množinou odebírání. Budeme uvažovat hru s odebíráním předmětů (dále jen kamenů). Hra bude dána počáteční pozicí $m \in \mathbb{N}$ a konečnou množinou S, která bude označovat možné tahy. Vždy budeme předpokládat, $1 \in S$. Hra s odebíráním předmětů NIM$[S; m]$, je hra dvou hráčů, kde

1. máme k dispozici jednu hromádku s m kameny,
2. hráč I ve hře začíná a udělá první tah, je-li to možné,
3. v každém tahu odebere z hromádky k kamenů, $k \in S$,
4. hráč, který odebere poslední kámen vyhrál.[2]

Úloha 0.74. Napište program, který po vložení S a m zjistí, který z hráčů má vyhrávající strategii a jak se bude hrát. Uvědomte si, že:

[2] Hráč na tahu, který již nemůže táhnout, prohrál a druhý hráč vyhrál.

1. každá hra $\text{N}\textsc{im}[S;m]$ má $m+1$ pozic, které odpovídají počtu kamenů na hromádce $\{0,1,\ldots,m\}$,
2. orientovaný graf hry $\text{N}\textsc{im}[S;m]$ s $m+1$ uzly, $V=\{0,1,\ldots,m\}$ a množinou orientovaných hran E takových, že $(i,j)\in E$ právě tehdy, když $i-j\in S$
3. uzly mohou být označovány $\mathcal{P}$, resp. $\mathcal{N}$. Pozice $\mathcal{P}$ znamená, že předcházející hráč, který táhl do této pozice, má vyhrávající strategii, nebo přímo vyhrál (koncová pozice), zatímco pozice $\mathcal{N}$ označuje, že následující hráč má vyhrávající strategii (výhodu). Je jasné, že $\text{N}\textsc{im}[S;0]$ je $\mathcal{P}$ pozice. Hráč, který je na tahu, nemůže odebrat poslední kámen. Ostatní uzly (pozice) můžeme označovat pomocí následujícího algoritmu:
   (a) Uzel bude $\mathcal{N}$ pozice, pokud alespoň jedním tahem se dostaneme do pozice $\mathcal{P}$.
   (b) Uzel bude $\mathcal{P}$ pozice, pokud všechny uzly z pozice vedou do pozice $\mathcal{N}$.
4. Hráč I má vyhrávající strategii právě tehdy, když uzel m (tj. počáteční konfigurace) je označen jako $\mathcal{N}$ pozice.

Poznámka: Co se stane, pokud $1\notin S$? Například, pokud $2\in S$ je $0,1$ $\mathcal{P}$ pozice a $2,3$ je $\mathcal{N}$ pozice. Další hodnoty budou záviset na dalších prvcích množiny S. Pokud by byla $S=2$, potom n je $\mathcal{P}$ pozice právě když $n\equiv 0,1(\mod 4)$ a n je $\mathcal{N}$ právě když $n\equiv 2,3(\mod 4)$.

Příklad 0.75. (HRA $\text{N}\textsc{im}[3,2,1.]$) Který z hráčů má vyhrávající strategii? Tuto strategii nalezněte.

Úloha 0.76. Pro každou z následujících pozic určete:

1. zda se jedná o $\mathcal{N}$, či $\mathcal{P}$ pozici.
2. pokud se jedná o $\mathcal{N}$ pozici, nalezněte vyhrávající tah (tah do vyhrávající pozice).

1. $\text{N}\textsc{im}[1,2,6,9]$
2. $\text{N}\textsc{im}[89,45,20,15]$.

Úloha 0.77. Nalezněte vyhrávající tahy ve hrách $\text{N}\textsc{im}[12,19,27]$ a $\text{N}\textsc{im}[13,17,19,23]$. Úlohu řešte i pro betlové varianty!

Řešení:

1. Protože $\bullet 12+\bullet 19+\bullet 27 \overset{bin}{=} (1100)_2\oplus(10011)_2\oplus(11011)_2=(100)_2$ je nenulové, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Nespárovaná jednička je ve třetím sloupci pouze u čísla 12. Stačí odebrat 4 kameny z první hromádky.
2. Protože $\bullet 13+\bullet 17+\bullet 19+\bullet 23 \overset{bin}{=} (1101)_2\oplus(10001)_2\oplus(10011)_2\oplus(10111)_2=(11000)_2$, můžeme odebírat kámen z hromádek, které mají 1 v pátém

sloupci. Spočítáme $\bullet 13 + \bullet 24$, $\bullet 17 + \bullet 24$, $\bullet 19 + \bullet 24$, $\bullet 23 + \bullet 24$. Stačí odebrat 8 kamenů z posledních tří hromádek. Uvažte, že počet kamenů se na daných hrách po odebrání musí zmenšit.

3. Since in each case there are at least two heaps of size greater than one, our winning moves remain the same.

Úloha 0.78. Hraje se hra KAYLES K_n.

1. Nalezněte rekurzivní formuli Grundyovy funkce $\mathcal{G}(K_n)$.
2. Vypočítejte $\mathcal{G}(K_8)$
3. Potvrďte, nebo vyvraťte, tvrzení: Je-li $n > 0$, vyhraje v K_n první hráč.

Úloha 0.79. TRIPLE KAYLES se hraje jako obvyklé KUŽELKY až na to, že je možné v jednom tahu shodit tři sousední kuželky.

Úloha 0.80. Uvažujme hru KAYLES. Pro každou hru vypočtěte Grundyovu hodnotu a nalezněte vyhrávající tah pro prvního hráče, je-li tato hodnota nenulová a je-li dáno:

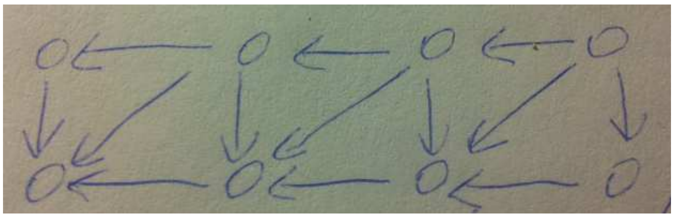
1. 7 kuželek
2. 17 kuželek
3. 23 kuželek.

Úloha 0.81. Dva hráči hrají hru KAYLES. Před hráči stojí vedle sebe tři spojité bloky $8, 9$ a 10 kuželek. Nalezněte hodnotu hry. Jaký je první optimální tah prvního hráče?

Řešení: Hodnota hry je $* + \bullet 4 + \bullet 2 = \bullet 7$. První hráč může shodit druhou kuželku v bloku 9 kuželek (rozloží tento blok na souvislé řady 1 a 7 kuželek). Nyní hodnota hry bude $* + (* + \bullet 2) + \bullet 2 = \bullet 0$ a první hráč vyhraje.

Úloha 0.82. (KAYLES.) Hráč na tahu vybere jednu, nebo dvě sousedící v jednom řádku, kuželky. Hráč, který odebere poslední kuželku vyhrál.

Úloha 0.83. Na následujícím grafu nalezněte Grundyovy hodnoty:



Úloha 0.84. Na stole je hromádka kamenů, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu musí hráč odebrat vlastního dělitele počtu kamenů, nebo 1 kámen. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci.

Úloha 0.85. Uvažujme hru Nim s dodatečným pravidlem, které umožňuje odebírat jeden kámen, nebo prvočíselný počet kamenů (Prvočíselný Nim).

1. Nalezněte Grundyovy hodnoty $\mathcal{G}(P_n)$, kde je n kamenů na hromádce P_n, kde $0 \leq n \leq 8$.
2. Vyslovte pravidlo pro hodnoty $\mathcal{G}(P_n)$.
3. Pravidlo dokažte.
4. Nalezněte vyhrávající tah v pozici se třemi hromádkami $(100, 50, 25)$.

Úloha 0.86. Nalezněte šachovnicový graf, je-li dáno: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$; $F(a) = \{b, d, f\}$, $F(b) = \{a, c\}$, $F(c) = \{\}$, $F(d) = \{d\}$, $F(e) = \{c, e\}$, $F(f) = \{a, b, c\}$. Nakreslete příslušný orientovaný graf a vrcholům přiřaďte Grundyovy hodnoty.

Úloha 0.87. Uvažujme následující hru pro dva hráče. na stole leží n hromádek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kamenů. V jednom tahu je možné odebrat $1, 2$ nebo 6 kamenů z jedné hromádky. Hra končí, když na hromádkách není žádný kámen. Hráč, který zahrál jako poslední, vyhrál.

1. Nalezněte $\mathcal{G}(x)$ – Sprague–Grundyovu funkci pro hromádku s x kameny, kde x je přirozené číslo. Svůj závěr dokažte!
2. Uvažujme pozici $x_1 = 5, x_2 = 9, x_3 = 13$. Ukažte, že tato pozice je vyhrávající (pro prvního hráče) a nalezněte všechny vyhrávající tahy z této pozice.

Úloha 0.88. Hraje se taková hra: Je dáno několik nenulových hromádek kamenů. Tahem lze rozdělit libovolnou hromádku na dvě neprázdné hromádky. Vyhrávající hráč udělal poslední tah. Koncová pozice je několik hromádek s jedním kamenem na každé. Vypočítejte Sprague–Grundyovu posloupnost této hry a pomocí této posloupnosti, které počáteční pozice jsou vyhrávající pro prvního hráče. Svůj závěr dokažte!

%

Úloha 0.89. Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice ve hře s odebíráním, je-li $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj závěr zdůvodněte!

Úloha 0.90. Nalezněte Sprague–Grundyovy hodnoty ve hře s odebíráním, je-li $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj závěr dokažte!

Úloha 0.91. Uvažujme hru s odebíráním předmětů, kde pravidla hry umožňují odebírat počet kamenů dělitelný třemi. Koncové pozice jsou $0, 1, 2$. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost.

Úloha 0.92. Hraje se hra s následujícími pravidly. Na stole leží 4 hromádky kamenů. Hráč na tahu může odebrat libovolný nenulový počet z prvních dvou hromádek a libovolný počet kamenů dělitelných třemi z posledních dvou hromádek. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci počáteční pozice $[61, 27, 17, 49]$. Svůj závěr zdůvodněte. Pozn. Hráč odebírá vždy pouze z jedné hromádky.

Úloha 0.93. Nechť $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ je nestranná hra.

1. Kolik má hra pozic?
2. Vypočítejte Grundyovu hodnotu této hry.
3. Kdo ve hře vyhraje?

Úloha 0.94. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost hry, která se hraje na jedné hromádce, kde hráči mohou odebrat, jsou-li na tahu, nejméně jeden a nejvíce polovinu kamenů z hromádky.

Úloha 0.95. Najděte Sprague–Grundyovu funkci pro hru s odčítáním, je-li $S = \{1, 2, 3\}$.

Úloha 0.96. Hra s odčítáním a s parametrem: Nalezněte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozici pro hru s odčítáním s množinou S_n, je-li

1. $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}; n > 0.$
2. $S_n = \{1, 2, n\}; n > 2.$

Úloha 0.97. Na hromádce je n kamenů. V každém tahu je možné rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

1. Kdo vyhraje v optimální hře v závislosti na n?
2. Je odpovídající Sprague–Grundyova posloupnost periodickou?
3. Doplníme-li pravidlo hry, že hromádky se mohou rozdělit na dvě nestejné hromádky, řešte úlohu znova.

Úloha 0.98. Řešte úlohu **??** pomocí Sprague–Grundyovy posloupnosti.

Úloha 0.99. (HRA GRUNDY.) Základní postavení: Hromádka obsahující N kamenů. Pravidla: Hráči se v tazích střídají. Hráč vybere libovolnou hromádku a tu rozdělí na dvě nenulové hromádky s různým nenulovým počtem mincí. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah.

Úloha 0.100. (ANTIGRUNDY HRA.) je nestranná hra dvouhráčů na hromádkách s fazolemi. Počet fazolí na každé hromádce musí být kladný. Jako obvykle vyhrává hráč, který táhne jako poslední. Hráči se pravidelně ve svých tazích střídají. Tahem je označení nějaké hromádky a její rozdělení na dvě nebo více hromádek, ale tak, že nově vzniklé hromádky mají stejný počet. Např. označíme-li hromádku s n fazolemi symbolem n, potom 6 může být $2+2+2$, nebo $3+3$, $\S nebo$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,§ po následujícím tahu můžeme např. dostat: $1+1+2+2$ a pod.

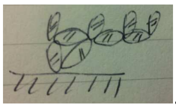
Úloha 0.101. (PEGGGY NIM.) Základní postavení: Hromádky kamenů. Pravidla: Hráč může odebírat z jedné hromádky sudý počet kamenů (ale ne celou). V případě, že na hromádce je lichý počet kamenů, může odebrat i celou hromádku. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah. Nápověda: Úlohu řešte nejdříve pro jednu hromádku, nalezněte Grundyovu funkci a použijte součet her. Ukažte, že např. postavení (7,6,8,4) je nenulové, prvním dobrým tahem je odebrání celé první hromádky.

Úloha 0.102. Uvažujme hru NIM s dodatečnou podmínkou, kdy je dovoleno v jednom tahu odebrat buď jeden kámen nebo prvočíselný počet $2, 3, 5, \ldots$ kamenů.

1. Nalezněte Grundyovu funkci $\mathcal{G}(P_n)$ pozice P_n, kde n je počet kamenů $0 \leq n \leq 9$.
2. Odhadněte z nalezených hodnot, jak bude dále posloupnost Grundyových čísel pokračovat.
3. Tvrzení dokažte.
4. Použijte pro pozici $(19, 56, 23, 7)$.

Úloha 0.103. Zahrajte si CHOMP! na $n = 4000 = 2^5 \cdot 5^3$ nebo pro $n = 10^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20}$.

Úloha 0.104. CHOMP![3] Čokoláda je rozdělena na dílky. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč odebere jeden dílek a s ním všechny nad a vpravo. S těmito dílky se již nehraje. Hráč, který je donucen odebrat levý dolní dílek prohrál.

Úloha 0.105. Ve hře ZELENÝ HACKENBUSH nalezněte hodnotu grafu: .

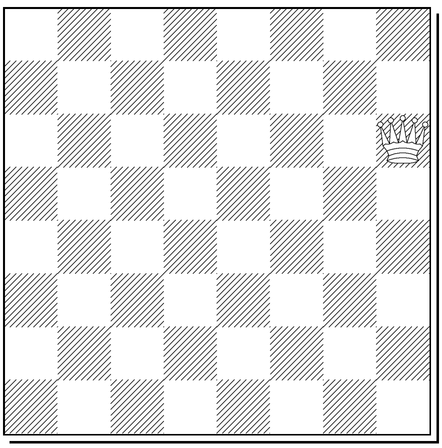


Diagram W

[3] F. Shuh, 1952

Úloha 0.106. Na políčku $h6$ šachovnice je postavena dáma (jako na diagramu W). Dáma má dovoleno posunout se vlevo, dolů nebo diagonálně vlevo-dolů. Hru hrají dva hráči. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který umístí dámu na políčko $a1$, vyhrál (normální varianta). Pro koho je hra výhodná? Začne-li první hráč, jaký tah udělá?

Úloha 0.107. (15 OŘECHŮ.) Na stole leží 15 ořechů. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu hráč odebere alespoň jeden, ale ne více jak polovinu ořechů. Prohraje hráč, který nemůže táhnout. Úlohu řešte také pro libovolný počet ořechů.

Úloha 0.108. (30 ZÁPALEK.) Na stole je 30 zápalek. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč odebere nejvíce 6 zápalek. Hráč, který odebere poslední zápalku, vyhrál. Jak musíte hrát, abyste vyhrál?

Úloha 0.109. (100 KAMENŮ.) Na stole leží 100 kamenů. Dva hráči střídavě odebírají 1 až 5 kamenů. Prohrává hráč, který odebere poslední kámen. Nalezněte vyhrávající strategii pro prvního hráče.

Úloha 0.110. (DAISY.) Trhají se okvětní lístky heřmánku. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu je možné utrhnout jeden lístek, nebo dva sousední lístky. Vyhraje hráč, který odebere poslední lístek.

Úloha 0.111. (AUTÍČKO.) Na proužku papíru jsou čtverečky označené $0, 1, 2, \ldots, 15$. Dva hráči střídavě posouvají kámen o $1, 2$ nebo 3 políčka vlevo. Hráč, který nemůže posunout kámen, prohrál. V jakých pozicích vyhraje první (začínající) hráč?

Prohrávající pozicí se nazývá pozice, ze které hráč na tahu prohraje. Vyhrávající pozicí se nazývá pozice, ze které hráč na tahu vyhraje.

Úloha 0.112. (NA ŠACHOVNICI.) Na počátku hry stojí pěšec v levém dolním rohu šachovnice. Petr a Lenka střídavě posouvají pěšec na sousední pole: vlevo nahoru, nahoru, vpravo nahoru, vpravo nebo vpravo dolu. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Kdo vyhraje, hrají-li oba optimálně?

Hrát optimálně znamená: pokud hráč může táhnout do vyhrávající pozice, tak tam táhne; nedělá záměrné chyby.

Úloha 0.113. Hra 50 kamenů: První tah je odebrání 1 nebo dvou kamenů. V každém následujícím tahu se odebírá nejméně jeden kámen a ne více jak dvojnásobek kamenů v předcházejícím tahu (co odebral protihráč).

Úloha 0.114. (Součet Nimu.)

1. Najděte nim součet $27 \oplus 17$.
2. Najděte x takové, aby $25 \oplus x = 38$.

Úloha 0.115. Na posledních třech políčkách šachovnice $1 \times n$ jsou tři kameny. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V tahu hráč posune nějaký kámen vlevo o několik políček. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Který z hráčů vyhraje při optimální hře obou hráčů?

Úloha 0.116. Analyzujte a nalezněte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozici pro následující hry s odčítáním s množinou S, je-li

1. $S = \{1, 3, 4\}$
2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $S = \{1, 3, 5, 7\}$
4. $S = \{1, 3, 6\}$
5. $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$.

Ve všech případech určete pokud

1. je počáteční počet kamenů 100, vyhraje první nebo druhý z hráčů?
2. pro $n = 31$ nalezněte, pokud existují, všechny vyhrávající tahy.

Úloha 0.117. Nim součet: Nalezněte x, pro které:

1. $x = 27 \oplus 17$,
2. $38 + x = 25$.

Úloha 0.118. Najděte nim hodnotu v závislosti na n pro pozice ve hře Nim, je-li

1. $1 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus n$
2. $1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus \cdots \oplus (2n+1)$
3. $2 \oplus 4 \oplus 6 \oplus \cdots \oplus (2n)$
4. $1 \oplus 5 \oplus 9 \oplus 13 \oplus \cdots \oplus (4n+1)$
5. $1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 8 \oplus \cdots \oplus 2^n$.

Úloha 0.119. Nimble. Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném $0, 1, 2, \ldots$ Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna nebo více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čtvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm jsou nějaké mince). Koncový stav je takový, že všechny mince jsou na čtverečku s číslem 0. Hráč, který táhl poslední, vyhrál. Zahrajte si hru a nalezněte optimální strategii jednoho z hráčů.

Úlohy 0.120. Následující hry jsou hrami dvou hráčů, označujeme je I a II, I. hráč ve hře začíná. Problémem je nalézt a popsat vítěznou strategii pro jednoho z hráčů. Řešení hry znamená nalézt takovou vítěznou strategii, bez ohledu na možné tahy protihráče.

1. (a) Na stole leží 25 kamenů. V každém tahu hráč může odebrat jeden až čtyři kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.
   (b) Zahrajte si stejnou hru, ale s 24 kameny.
   (c) Zahrajte si stejnou hru, ale s n kameny!
2. (a) Mějme dvě hromádky kamenů, na jedné 7 a na druhé 11 kamenů. V každém tahu hráč může odebrat libovolný počet kamenů, ale pouze z jedné hromádky. Poslední hráč vyhrává.
   (b) Úlohu také řešte pro hromádky o velikosti m a n.
3. (a) Hráči vytvářejí dvaceticiferné číslo. V každém tahu zleva do prava dopisují jednu cifru. První hráč vyhraje, není-li výsledek dělitelný 7, jinak vyhraje II. hráč.
   (b) Co můžete očekávat, nahradíme-li číslo 7 číslem 13?
4. Je dán konvexní n-úhelník, hráči střídavě označují diagonály. Označené diagonály se nesmějí protínat. Hráč, který nemůže označit svou diagonálu, prohrál.
5. Na hromádce je 25 kamenů. Hráč v každém tahu může odebrat $1, 2$ nebo 4 kameny. Hráč, který nemůže pokračovat (na hromádce již nebudou kameny), prohrál.
6. Na šachovnici 8×8 je raněná věž. Raněná věž se může pohybovat pouze vlevo nebo dolů o libovolný počet políček. Hráč, který nemůže zahrát, prohrál. Úlohu řešte také pro různá postavení věže.
7. Na stole jsou dvě hromádky kamenů. Jedna hromádka obsahuje 10 kamenů, druhá 7. Hráč může odebrat jeden kámen z první hromádky, nebo ze druhé, nebo jeden kámen z obou současně. Hráč, který nemůže zahrát, prohrál.
8. Na počátku hry je na tabuli napsáno číslo 60. Během hry, hráč na tahu, vezme dělitele napsaného čísla na tabuli a odečte od čísla na tabuli tohoto dělitele, atd. Výsledné číslo bude 0. Hráč, který dosáhne číslo 0, prohrál.
9. První hráč zvolí číslo mezi 2 a 9. Druhý hráč toto číslo vynásobí opět číslem mezi 2 a 9. První hráč toto číslo vynásobí číslem mezi 2 a 9, atd. První hráč, který převýší číslo 1000, vyhrál.
10. V jednom řádku je napsáno několik znaků minus. Hráč na tahu vybere jedno minus, nebo dvě sousední a udělá z nich plus. Hráč, který změní poslední minus, vyhrál. Úlohu řešte i pro případ, kdy minus jsou v počátečním postavení nakreslena do kruhu.
11. Na počátku hry je jedna hromádka kamenů. Tahem je rozdělení hromádky na dvě nestejné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

   (a) Po prvním tahu dvě hromádky obsahují 5 a 11 kamenů. Nalezněte vyhrávající strategii pro druhého hráče.
   (b) Po prvním tahu hromádky obsahují 5 a 11 kamenů. Uveďte příklad, jak druhý hráč by neměl zahrát.
   (c) Který z hráčů má vyhrávající strategii, je-li na počátku na hromádce 11 kamenů.
   (d) Je-li na počátku 22 kamenů, který z hráčů vyhraje?
   (e) Uměli byste úlohu vyřešit obecně?
12. Na stole leží
   (a) 57 kamenů
   (b) 50 kamenů
   (c) 1000 kamenů
   (d) $n > 1$ kamenů.

   Hraje se tak, že
   - První hráč nemůže odebrat v prvním tahu všechny kameny.
   - V následujících tazích hráč nesmí odebrat více kamenů, než jeho soupeř.

   Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Úloha 0.121. Na hromádce je 21 kamenů, první hráč odebírá nejvýše dva, druhý hráč odebírá nejvýše tři kameny v každém tahu. Hráči se v tazích střídají a hráč, který odebere poslední kámen vyhrál.

Úloha 0.122. Na hromádce je 121 kamenů. Hráči se v tazích střídají. První z hráčů odebírá 1 nebo 3 kameny, druhý z hráčů odebírá 2 nebo 3 kameny. Prohrává hráč, který nemůže udělat tah. Budou-li oba hráči hrát optimálně, kdo vyhraje?

Úloha 0.123. (DAISY.) Mince jsou postaveny tentokrát do kruhu. Hráči se v tazích střídají. Tahem je odebrání jedné mince, nebo dvou sousedních. Vyhrává hráč, který odebral poslední minci.

Úloha 0.124. (ŠESTNÁCT VĚŽÍ.) Základní postavení: Šachovnice s osmi bílými a černými věžemi v základním postavení na prvním, resp. osmém řádku. Pravidla: Věže se mohou posunovat nahoru nebo dolů (po sloupcích). Cílem hry je zamezit pohybu věží protihráče. Začíná bílý hráč. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, prohrává: hráč, již nemůže táhnout. (Tato hra není ani kombinatorickou hrou, dovoluje opakování tahů). Nápověda 1: Hru nejdříve hrajte na menší šachovnici. Nápověda 2: Soustřeďte se na vzdálenost mezi dvěma protilehlými věžemi. Počet prázdných políček bude odpovídat počtu předmětů na hromádce ve hře Nim.

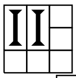
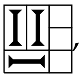
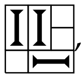
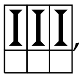
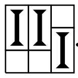
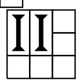
Úloha 0.125. (WYT QUEEN.) Základní postavení: Šachovnice s jednou bílou královnou. Pravidla: Královna se může posunout po řádcích vlevo, po sloupcích dolů, popř. po diagonále vlevo dolů, a to o libovolný nenulový počet políček. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah. Hra se hraje i s více figurami. Zahrajte si také některou variantu této hry (Věž: tahy pouze vlevo nebo dolů; Jezdec: tahy dolů nebo vlevo.).

Úloha 0.126. Na stole leží n kamenů. Dva hráči L a R střídavě odebírají několik kamenů. L může odebírat pouze 1 nebo 2 kameny, R odebírá 3 nebo 4 kameny. Prohrává hráč, který nemůže podle pravidel táhnout. Kdo vyhraje (oba hráči hrají optimálně), je-li na hromádce a) $n = 132$ nebo b) $n = 175$ kamenů. Úlohu řešte pomocí zpětné indukce a nezapomeňte, že na začátku je losem určeno, který z hráčů začíná.

Úloha 0.127. Úloha je stejná jako předcházející. Tentokrát ale L bude odebírat 1 nebo 3 kameny, R bude odebírat 2 nebo 4 kameny a hra se bude hrát v betlové variantě, tj. hráč, který udělal poslední tah prohrál. Úlohu řešte pro $n = 321$ a pro $n = 383$.

Příklad 0.128. (HRA pNIM) Hra s odebíráním předmětů, lze odebírat jeden kámen nebo počet kamenů, který je prvočíslo.

Úloha 0.129. (HRA p^nNIM) Hra s odebíráním předmětů, lze odebírat jeden kámen nebo počet kamenů, který je nějakou mocninou prvočísla p.

Úloha 0.130. Ve hře  jsou možné tahy: , , , . Všechny tyto pozice jsou $\mathcal{N}$. Tedy hra  je $\mathcal{P}$. Uvědomte si, že druhý hráč může vždy zahrát symetricky.

Úloha 0.131. (BETLOVÁ VARIANTA HRY S ODČÍTÁNÍM.) $S = \{1, 2, 3\}$, poslední hráč, který udělal tah, prohrál. Cílem hry je donutit protihráče udělat poslední tah – odebrat kámen. Analyzujte hru a najděte $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 0.132.
1. Nalezněte nim součet $\bullet 27 + \bullet 17$.
2. Víte-li, že $\bullet 38 + \bullet x = \bullet 25$, nalezněte x.

Řešení:

1. $\bullet 27 + \bullet 17 \overset{bin}{=} (11011)_2 \oplus (10001)_2 = (1010)_2 = \bullet 10$.
2. $\bullet 38 + \bullet x \overset{bin}{=} (100110)_2 + \bullet x = (11001)_2$, tedy $x = (111111)_2 = 63$.

Úloha 0.133. Nalezněte nim součet 29 a 14; $13, 19$ a 23. Určete x tak, aby $22 \oplus x = 7$.

Úloha 0.134. Uvažujme partyzánskou variantu hry Nim. První hráč odebírá $s_1 \in S_1 = \{1, 3, 4\}$ kamenů, druhý $s_2 \in S_2 = \{1, 2\}$. Nalezněte všechny vyhrávající pozice pro prvního hráče a svůj závěr zdůvodněte. Uvažujte obě možnosti, tj. začíná levý nebo pravý hráč.

Úloha 0.135. Platí $2 \oplus 8 \oplus 14 = 5$?

Řešení: beginreseni Neplatí. Platí $2 \oplus 8 \oplus 14 = 2 \oplus 8 \oplus (2 + 4 + 8) = 4$

Úloha 0.136. Na hromádce je 1111 kamenů. První hráč může odebírat 2 nebo 3 kameny, druhý hráč může odebírat 3 nebo 4 kameny. První hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Kdo vyhraje v této hře?

Úloha 0.137. (Stříbrný dolar a dědictví.) Na počátku hry Stříbrný dolar nebo Dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček $1, 2, \ldots, 16$, vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamene vlevo na prázdné pole. Ve variantě Stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty Dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.

Úloha 0.138. (Zlatý dolar.) Na pásku rozděleném na jednotlivá políčka jsou rozmístěny mince, z nichž jedna je zlatý dolar. Pásek končí na hraně stolu. Hráči se v tazích střídají. Tah hráče spočívá v přesunutí libovolné mince doleva ke hraně stolu. Pokud je mince přemístěna až za hranu stolu, je ze hry odstraněna. Na polích je nejvýše jedna mince, žádná mince se nesmí přeskočit. Minci lze přesunout maximálně k bezprostředně předcházející minci. Vyhrává hráč, který odebere ze stolu „zlatý dolar".

Úloha 0.139. (Převracení želv.) (Turning turtles.) Mince jsou položeny v jedné řadě, některá lícem, jiné rubem nahoru. Hráči se v tazích střídají. Hráč otočí jednu minci z líce na rub a může otočit i jiné mince vlevo od vybrané. Vyhrává: Hráč, který jako první dosáhne, že všechny mince jsou naruby. Analyzujte hru v postavení O O P P O P P (orel, panna).

Úloha 0.140. (Převracení nejvýše tří želv.) Mince jsou položeny v jedné řadě, některá lícem, jiné rubem nahoru. Hráči se v tazích střídají. Pravidla: Hráč otočí jednu minci z líce na rub a může otočit i jiné mince (ale nejvýše 3) vlevo od vybrané. Koncová pozice: Vyhrává hráč, který jako první dosáhne, že všechny mince jsou naruby. (Je hra skutečně konečná?)

Úloha 0.141. (Mooreův Nim$_k$) Na hrací desce máme několik hromádek mincí. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který je na tahu, může odstranit mince z libovolných k hromádek (počet mincí ze které je libovolný), přitom ale musí odebrat alespoň jednu minci. Vyhrává hráč, který odebere poslední minci (normální varianta).

Úloha 0.142. (Dvojrozměrný Nim.) Hraje se na čtvercové síti, kde je umístěn konečný počet kamenů (na jednom poli může být i více kamenů). Hráči se v tazích střídají. Tah spočívá v přesunu jednoho kamene směrem vlevo ve stejném řádku, nebo na pole v některém nižším řádku. Vyhrává hráč, který odebere poslední kámen. Nalezněte vzorec pro vítězné pozice v této hře. Varianta této hry připouští tahy s celou hromádkou dolů, nebo vlevo, popř. odebrat z hromádky předmět.

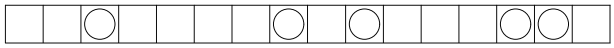
Úloha 0.143. (Hra Nim na schodech.) Na jednotlivých n stupních schodů jsou položeny kameny (na jednom poli může být i více kamenů). Hráči se v tazích střídají. Tah spočívá v přesunu několika kamenů (alespoň jednoho) o schod níže. S kameny, které dosáhnou 0tého stupně, se dále již nehraje. Koncová pozice, vyhrává: všechny kameny jsou již na 0tém schodu, poslední hráč, který táhnul, vyhrává.

Úloha 0.144. (Euklidova hra.) Základní postavení: Je dána uspořádaná dvojice (x, y) kladných celých čísel x, y. Pravidla: Hráč, který je na tahu, může odečíst od většího čísla nenulový celočíselný násobek menšího čísla tak, aby výsledek byl ještě kladný. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, prohrává: hráč, který je na tahu a nemůže již táhnout. Prohrávající pozice jsou (d, d), kde $d = \text{NSD}(x, y)$. Poslední hráč, který zahrál svůj tah, vyhrál.

Euklidova hra se někdy zobecňuje: pravidla hry jsou stejná až na to, že odebírat lze jen jisté násobky pevně stanovených čísel.

Úloha 0.145. Stříbrný dolar a dědictví Na počátku hry stříbrný dolar nebo dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček $1, 2, \ldots, 16$, vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamenu vlevo na prázdné pole. Ve variantě stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.

Úloha 0.146. (Stříbrný dolar a dědictví.) Na počátku hry stříbrný dolar nebo dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček $1, 2, ..., 16$, vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamene vlevo na prázdné pole. Ve variantě stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.



Úloha 0.147. FIBONACCIOVA HRA NIM je variantou her s odebíráním kamenů. Hráči odebírají kameny z jedné hromádky, v tazích se střídají. V každém tahu mohou odebrat nejvíce polovinu předcházejícího odebraného počtu kamenů. Hráč, který odebere poslední kámen vyhraje. První hráč nemůže odebrat v prvním tahu všechny kameny.

Úloha 0.148. Zahrajte si nestrannou hru NIM$[16, 17, 18, 20, 24]$.

Úloha 0.149. Zahrajte si hru NIM$[3, 4, 5]$.

Úloha 0.150. Jak odpovíte ve hře NIM$[25, 13, 23, 3]$, pokud první tah bylo odebrání 9 kamenů ze třetí hromádky?

Úloha 0.151. Kdo vyhraje a jak v pozicích NIM$[5, 6, 7]$ a NIM$[20, 10, 19, 13]$?

Úloha 0.152. (HRA 31.)[4] Z balíčku karet se odeberou karty s hodnotami eso, $2, 3, 4, 5$ a 6 všech barev (dohromady 24 karet). Všechny karty se rozloží na stůl lícem vzhůru. Eso se počítá jako jedna. Hráči střídavě obracejí karty a sčítají jejich hodnoty. Hráč, který jako první převýší počet 31, prohrál. Tato hra je podobná hře NIM s $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $n = 31$, ale je tu jeden rozdíl, každou hodnotu je možné použít nejvýše 4krát.

1. Ve hře 31 může vyhrát první hráč. Najděte jeho vyhrávající strategii.
2. Najděte vyhrávající strategii pro hru s odčítáním, tj. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $n = 31$.

Úloha 0.153. (DVĚ HROMÁDKY.) Na stole leží dvě hromádky předmětů. Na jedné hromádce je 6 předmětů a na druhé hromádce je devět předmětů. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který je na tahu, odebere z jedné, z druhé, nebo z obou zároveň nejvýše tři předměty. Hráč, který odebral poslední předmět, vyhrál.

Úloha 0.154. (AUTOBUS.) Základní postavení: Hraje se jako obvyklý NIM na několika hromádkách. Pravidla: Tahy jsou jako v NIMu (hráč vybere libovolnou hromádku a z ní odebere kladný počet předmětů) a navíc s tímto tahem: Hráč, který je na tahu, může vybrat hromádku, odebrat z ní nenulový počet předmětů a tyto předměty přidat na nějakou jinou hromádku. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který táhne jako poslední. První hráč, který již nemůže táhnout, prohrál. Nápověda: Strategie je stejná, jako v obyčejném NIMu. Pokud první hráč je v nulové pozici, odebere a přesune nějaké kameny, druhý hráč tyto kameny odebere.

[4] G. Mott-Smith, 1954

Úloha 0.155. (121 KAMENŮ.) Na hromádce je 121 kamenů. Dva hráči L a R střídavě odebírají z hromádky kameny. Začíná hrát L. Hráč L může odebírat 1 nebo 3 kameny, hráč R v jednom tahu může odebrat 2 nebo 4 kameny. Prohrává hráč, který nemůže udělat podle pravidel tah. Který z hráčů vyhraje? Pokud vyhraje L, jaký udělá první tah?

Úloha 0.156. Na stole leží dvě hromádky kamenů. V každém tahu hráč může odebrat libovolný počet kamenů z jedné hromádky nebo stejný počet kamenů z obou současně. Hra se hraje v normální variantě. Nalezněte algoritmus pro nalezení všech prohrávajících pozic.

Úloha 0.157. Jsou dány dvě hromádky kamenů, ve větší je 8 kamenů. Dva hráči se střídají v tazích, odebírají libovolný počet kamenů z jedné hromádky z jedné z nich nebo současně stejný počet z obou. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Kdo vyhraje při optimální hře?

Úloha 0.158. V jedné hromádce je 18 kamenů, ve druhé 23. Dva hráči se střídají v tazích, v jednom tahu odeberou celou jednu hromádku a druhou rozdělí na dvě. Hráč, který nemůže rozdělit hromádku na dvě, prohrál. Jak musí zahrát první hráč, aby vyhrál?

Úloha 0.159. Na stole leží dvě hromádky kamenů. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Hráč na tahu může odebrat libovolný počet kamenů, vždy ale pouze z jedné hromádky. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Může si nějaký hráč vynutit vítězství?

Úloha 0.160. Na stole leží 100 kamenů (nebo jiných předmětů). Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V jednom tahu je možné odebrat $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ (libovolná mocnina dvou). Prohraje hráč, který nemůže odebrat kámen. Kdo vyhraje po „racionální" hře obou hráčů. První hráč, nebo jeho soupeř?

Úloha 0.161. Na hromádce je n kamenů, je dovolenou odebírat 1 až 10 kamenů v každém tahu. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Vyhraje hráč, který odebral poslední kámen. Pro jaká n vyhraje první hráč (ten, který začínal)?

Úloha 0.162. K dispozici jsou dvě hromádky kamenů, na větší z nich je 8 kamenů. Dva hráči střídavě odebírají libovolný počet kamenů z jedné hromádky, nebo stejný počet současně z obou. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Kdo vyhraje a jak? Předpokládejte, že oba hráči hrají racionálně.

Úloha 0.163. Na jedné hromádce je 18 kamenů, na druhé 23. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Hráč na tahu odebere celou jednu hromádku a druhou rozdělí na dvě hromádky. Hráč, který nemůže rozdělit hromádku (bude obsahovat 1 kámen), prohrál. Jak bude hrát začínající hráč?

Úloha 0.164. Na stole leží dvě hromádky kamenů, na každé z nich po 8 kamenech. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu je možné odebrat libovolný počet kamenů z jedné, nebo stejný počet kamenů současně z obou hromádek. Kdo v této hře vyhraje? Může si první hráč zabezpečit vítězství?

Úloha 0.165. Na šachovnici je postavena dáma. Její dovolené tahy jsou dolů, vpravo, nebo dolů vpravo. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Kdo ve hře vyhraje?

Úloha 0.166. TAKE-AWAYS GAMES. Na hromádce je n kamenů. Dva hráči se v tazích střídají. V prvním tahu hráč odebere libovolný počet kamenů, ale ne celou hromádku. V následujících tazích hráč může odebrat nejvíce polovinu kamenů předcházejícího odebraného počtu kamenů. Může první hráč ve hře vyhrát?

Úloha 0.167. Na jedné hromádce je 18 bonbónů, na druhé 23. Dva hráči střídavě sní jednu hromádku a druhou rozdělí na dvě hromádky. Hráč, který nemůže hromádku rozdělit (na hromádce zůstal jeden bonbón), prohrál. Existuje pro prvního hráče vyhrávající strategie?

Úloha 0.168. Na stole leží tři hromádky kamenů. Dva hráči střídavě odebírají kameny z hromádek, přičemž v každém tahu odeberou pouze z jedné hromádky nenulový počet kamenů. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Nalezněte strategii vyhrávajícího hráče! Řěšte i betlovou variantu této úlohy.

Úloha 0.169. (LUCASOVA.) Na stole leží dvě hromádky zápalek. Na jedné je 20 a na druhé 25 zápalek. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu si hráč vybere jednu hromádku a tu rozdělí na dvě. Prohraje hráč, který nemůže táhnout, tedy na hromádkách je po jednom kamenu. Kdo v této hře vyhraje, hrají-li oba hráči optimálně?

Úloha 0.170. (HRA NIM). Hra začíná s n hromádkami s n_k kameny na každé z nich. Oba hráči střídavě odebírají libovolný kladný počet kamenů, ale pouze vždy z jedné hromádky. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Úloha 0.171. (DESET FAZOLÍ) Na hromádce leží deset fazolí. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč může odebrat jednu, nebo dvě fazole. Hráč, která odebere poslední fazoli, vyhrál.

Úloha 0.172. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci pro hru s odčítáním $S = \{1, 2, 3\}$ a $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ pozice. Stejnou úlohu řešte i pro hru s odčítáním čtverců.

Pokud není uvedeno jinak, nalezněte vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů.

[2hs03RMF actual ulohynim–NEPOUZITO.tex, 28/10/16, 12:51]