1 Úlohy

Úloha 1.1. (NIM součet.) Budeme říkat, že číslo n je nim součtem čísel m a k (a píšeme $m \oplus k = n$), pokud číslo n získáme tímto postupem:

1. Čísla m a k zapíšeme ve dvojkové soustavě $m = (m_j \dots m_1 m_0)_2$, $k = (k_j \dots k_1 k_0)_2$, a menší číslo doplníme zleva nulami.
2. Získané posloupnosti sečteme jako vektory po složkách modulo 2, tedy

$$(m_j, \dots, m_1, m_0) + (k_j, \dots, k_1, k_0) \equiv (n_j, \dots, n_1, n_0) \pmod 2$$

3. Posloupnost $n_j, \dots, n_1, n_0$ převedeme na číslo $n = (n_j \dots n_1 n_0)_2$.

Například $4 \oplus 7$ spočítáme takto: $4 = (100)_2$, $7 = (111)_2$; $(1,0,0) + (1,1,1) \equiv (0,1,1) \pmod 2$; $(011)_2 = 3$, a tedy $4 \oplus 7 = 3$.

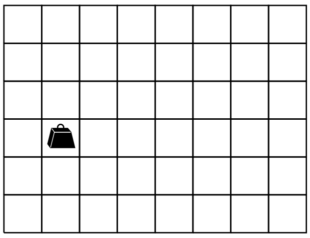
Dokažte, že nim součet má tyto vlastnosti:

1. $m \oplus m = 0$,
2. $m \oplus k = 0$, potom $m = k$,
3. $m \oplus k = k \oplus m$,
4. $(m \oplus k) \oplus i = m \oplus (k \oplus i)$,
5. pokud $n \neq 0$ a $m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_j = n$, potom existuje takové i, ($1 \leq i < j$), pro které $m_i \oplus n < m_i$.

Úloha 1.2. (Hra NIM.) Na počátku hry máme několik hromádek kamenů. Dva hráči střídavě odebírají kameny z hromádek. V každém tahu hráč si vybere jednu z nich a z ní odebere libovolný (nenulový) počet kamenů. Vyhraje hráč, který odebral poslední kámen (normální varianta hry). Nim součet kamenů na jednotlivých hromádkách označíme n (tj. $m_j \oplus \cdots m_2 \oplus m_1 = n$).

1. Dokažte: Hráč, který začíná v pozici s nulovým nim součtem se může svým tahem dostat pouze do pozice s nenulovým nim součtem
2. Dokažte: Z pozice s nenulovým nim součtem je možné vždy udělat tah do pozice s nulovým nim součtem.
3. Popište vyhrávající strategii ve hře NIM.
4. Jaký tah uděláte z pozice tří hromádek se 3, 4 a 5 kameny?

Úloha 1.3. (HRA LÁMÁNÍ ČOKOLÁDY.) K dispozici máme čokoládu, která se skládá z $6 \times 8 = 48$ dílků. Jeden z dílků je označen, jako na obrázku:



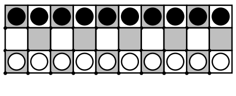
Dva hráči střídavě odlamují čtverečky po přímkách. Část, která neobsahuje vyznačený čtvereček, se může sníst (dále se s ní již nehraje). Prohrává hráč, který nemůže udělat tah, tj. zůstane na něj označený dílek.

1. Kdo z hráčů vyhraje, je-li pozice jako na obrázku?
2. Jak velká musí být čokoláda, aby první hráč vyhrál při libovolném umístění vyznačeného dílku?
3. Při jakých rozměrech čokolády prohraje první hráč při libovolném umístění vyznačeného dílku?

Poznámka: Hra je nestranná. Hráč na tahu zprava má 6 možností, shora 3, zleva 1 a zdola 2. První optimální tah je odebrat všechny dílky zprava. Dílkům přiřaďte Grundyova čísla.

Úloha 1.4.
1. (BACHETOVA HRA) Na hromádce je 100 kamenů, v každém tahu je možné odebrat 1 až 5 kamenů. Hráči se v tazích střídají a hráč, který odebere poslední kámen, prohrál. Nalezněte vyhrávající strategii pro prvního hráče.
2. K dispozici je několik hromádek kamenů a hra se hraje podobně, jako předešle. Hráč na tahu si vybere jednu z hromádek a z ní odebere 1 až 5 kamenů. Nalezněte vyhrávající strategii, pokud hráč, který odebere poslední kámen a) vyhrál, b) prohrál.

Úloha 1.5. (DAWSONOVY ŠACHY) Na šachovnici $3 \times n$ jsou pěšci, jako na obrázku. Pěšci chodí stejně jako v šachu, braní figurek je povinné. Kdo nemůže táhnout a) vyhrál b) prohrál. Který z hráčů vyhraje v závislosti na n?



(DAWSONOVY ŠACHY II) Hraje se na pásku čtverečků, které nejsou zpravidla obsazené znaky. Hráči se pravidelně ve svých tazích střídají, každým svým tahem umístí znak X na nějaký dosud prázdný čtvereček. Omezení pro tah je, že hráč, který je na tahu, nemůže znak X položit bezprostředně vedle již položeného znaku. Hráč, který udělal poslední tah, vyhrál.

Úloha 1.6. Analyzujte a nalezněte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozici pro následující hry s odčítáním s množinou S, je-li

1. $S = \{1, 3, 4\}$
2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $S = \{1, 3, 5, 7\}$
4. $S = \{1, 3, 6\}$
5. $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$.

Ve všech případech určete pokud

1. je počáteční počet kamenů 100, vyhraje první nebo druhý z hráčů?
2. pro $n = 31$ nalezněte, pokud existují, všechny vyhrávající tahy.

Úloha 1.7. Najděte, zda následující pozice ve hře NIM na několika hromádkách je $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$ pozice, je-li:

1. NIM$[2, 4, 6]$
2. NIM$[1, 5, 6]$
3. NIM$[1, 8, 9]$
4. NIM$[2, 3, 4, 5]$
5. NIM$[1, 3, 5, 7]$
6. NIM$[25, 43, 50]$
7. NIM$[10, 20, 30, 40]$
8. NIM$[12, 27, 39, 48]$.

Úloha 1.8. Dokažte, že následující tvrzení pro hru NIM.

1. NIM$[1, n, n+1]$ je $\mathcal{N}$ pozice právě a jen tehdy n je liché.
2. NIM$[n, 7-n, 7]$ je $\mathcal{P}$ pozice (pro $n \leq 7$).
3. Pokud NIM$[a, b, c]$ je $\mathcal{P}$ pozice, potom také NIM$[2a, 2b, 2c]$ a NIM$[2a+1, 2b+1, 2c]$ je také $\mathcal{P}$ pozice.
4. Pozice NIM$[0, n, n]$, NIM$[1, 2, 3]$, NIM$[1, 4, 5]$, NIM$[1, 6, 7]$, NIM$[2, 4, 6]$, NIM$[2, 5, 7]$, NIM$[3, 4, 7]$, NIM$[3, 5, 6]$ jsou $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.9. Nim součet: Nalezněte x, pro které:

1. $x = 27 \oplus 17$,
2. $38 + x = 25$.

Úloha 1.10. Nalezněte všechny vyhrávající tahy v pozicích: NIM$[10, 17, 25]$, NIM$[12, 19, 27]$, NIM$[25, 46, 50]$, NIM$[29, 29, 18]$, NIM$[93, 29, 74]$, NIM$[47, 99, 181]$, NIM$[13, 17, 19, 23]$.

Úloha 1.11. Najděte nim hodnotu v závislosti na n pro pozice ve hře NIM, je-li

1. $1 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus n$
2. $1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus \cdots \oplus (2n+1)$
3. $2 \oplus 4 \oplus 6 \oplus \cdots \oplus (2n)$
4. $1 \oplus 5 \oplus 9 \oplus 13 \oplus \cdots \oplus (4n+1)$
5. $1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 8 \oplus \cdots \oplus 2^n$.

Úloha 1.12. Najděte Sprague–Grundyovu funkci pro hru s odčítáním, je-li $S = \{1, 2, 3\}$.

Úloha 1.13. Hra s odčítáním a s parametrem: Nalezněte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozici pro hru s odčítáním s množinou S_n, je-li

1. $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}; n > 0$.
2. $S_n = \{1, 2, n\}; n > 2$.

Úloha 1.14. Betlová varianta hry s odčítáním. $S = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n\}$. Hráč, který udělá poslední tah, prohrál. Cílem hry je donutit protihráče udělat poslední tah (vzít poslední kámen). Analyzujte tuto hru a nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.15. ODEBER A ROZDĚL[1]. Ve dvou hromádkách se nachází kameny. V první hromádce je m kamenů, ve druhé je n kamenů. Pozici označíme $OR[m, n]$, kde $m > 0, n > 0$. Dva hráči se střídají v tazích. Tah spočívá v odebrání jedné hromádky a zbylou rozdělit na dvě neprázdné hromádky. Hráč, který udělá poslední tah, vyhrál. Ve hře je jediná koncová pozice $OR[1, 1]$. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.16. NIMBLE. Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném $0, 1, 2, \ldots$ Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna nebo více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čtvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm jsou nějaké mince). Koncový stav je takový, že všechny mince jsou na čtverečku s číslem 0. Hráč, který táhl poslední, vyhrál. Zahrajte si hru a nalezněte optimální strategii jednoho z hráčů.

Úloha 1.17. Betlový NIM: Zahrajte si betlový NIM s množinou $S = \{1, 2, 3\}$ na hromádce s 15 kameny.

Úloha 1.18. WYTHOFFOVA KRÁLOVNA. Množina dovolených tahů je stejná jako u hry NIM a nebo hráč ve svém tahu může odebrat stejný nenulový počet kamenů ($i = j \neq 0$) současně z obou hromádek. Hru analyzujte na šachovnici 7×7.

Úloha 1.19. DYNAMICKÉ ODČÍTÁNÍ. Třída her s odčítáním může být zobecněna tak, že jednotlivé tahy záleží na předcházejících tazích soupeře. Například:

[1] T. Ferguson, 1998

Mějme jednu hromádku kamenů. První hráč odebere libovolný nenulový počet kamenů, ale ne všechny. Potom se hráči střídají v tazích. V každém tahu nemůže hráč odebrat více než kamenů, než jeho soupeř v přecházejícím tahu.

1. Nalezněte nejlepší tah v pozici $n = 44$.
2. Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.20. Na stole leží dvě hromádky kamenů. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Hráč na tahu může odebrat libovolný počet kamenů, vždy ale pouze z jedné hromádky. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Může si nějaký hráč vynutit vítězství?

Úloha 1.21. Na stole leží 100 kamenů (nebo jiných předmětů). Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V jednom tahu je možné odebrat $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ (libovolná mocnina dvou). Prohraje hráč, který nemůže odebrat kámen. Kdo vyhraje po „racionální“ hře obou hráčů. První hráč, nebo jeho soupeř?

Úloha 1.22. Na hromádce je 15 kamenů. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V každém tahu mohou odebrat $2, 4$ nebo 7 kamenů. Prohraje hráč, který nemůže táhnout. Kdo vyhraje?

Úloha 1.23. Na hromádce je n kamenů, je dovolenou odebírat 1 až 10 kamenů v každém tahu. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Vyhraje hráč, který odebral poslední kámen. Pro jaká n vyhraje první hráč (ten, který začínal)?

Úloha 1.24. K dispozici jsou dvě hromádky kamenů, na větší z nich je 8 kamenů. Dva hráči střídavě odebírají libovolný počet kamenů z jedné hromádky, nebo stejný počet současně z obou. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Kdo vyhraje a jak? Předpokládejte, že oba hráči hrají racionálně.

Úloha 1.25. Na posledních třech políčkách šachovnice $1 \times n$ jsou tři kameny. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V tahu hráč posune nějaký kámen vlevo o několik políček. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Který z hráčů vyhraje při optimální hře obou hráčů?

Úloha 1.26. Na jedné hromádce je 18 kamenů, na druhé 23. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Hráč na tahu odebere celou jednu hromádku a druhou rozdělí na dvě hromádky. Hráč, který nemůže rozdělit hromádku (bude obsahovat 1 kámen), prohrál. Jak bude hrát začínající hráč?

Úloha 1.27. Hra NIM s omezenou množinou odebírání. Budeme uvažovat hru s odebíráním předmětů (dále jen kamenů). Hra bude dána počáteční pozicí $m \in \mathbb{N}$ a konečnou množinou S, která bude označovat možné tahy. Vždy budeme předpokládat, $1 \in S$. Hra s odebíráním předmětů NIM$[S; m]$, je hra dvou hráčů, kde

1. máme k dispozici jednu hromádku s m kameny,
2. hráč I ve hře začíná a udělá první tah, je-li to možné,
3. v každém tahu odebere z hromádky k kamenů, $k \in S$,
4. hráč, který odebere poslední kámen vyhrál.[2]

Úloha 1.28. Napište program, který po vložení S a m zjistí, který z hráčů má vyhrávající strategii a jak se bude hrát. Uvědomte si, že:

1. každá hra Nim$[S; m]$ má $m + 1$ pozic, které odpovídají počtu kamenů na hromádce $\{0, 1, \ldots, m\}$,
2. orientovaný graf hry Nim$[S; m]$ s $m + 1$ uzly, $V = \{0, 1, \ldots, m\}$ a množinou orientovaných hran E takových, že $(i, j) \in E$ právě tehdy, když $i - j \in S$
3. uzly mohou být označovány $\mathcal{P}$, resp. $\mathcal{N}$. Pozice $\mathcal{P}$ znamená, že předcházející hráč, který táhl do této pozice, má vyhrávající strategii, nebo přímo vyhrál (koncová pozice), zatímco pozice $\mathcal{N}$ označuje, že následující hráč má vyhrávající strategii (výhodu). Je jasné, že Nim$[S; 0]$ je $\mathcal{P}$ pozice. Hráč, který je na tahu, nemůže odebrat poslední kámen. Ostatní uzly (pozice) můžeme označovat pomocí následujícího algoritmu:
   (a) Uzel bude $\mathcal{N}$ pozice, pokud alespoň jedním tahem se dostaneme do pozice $\mathcal{P}$.
   (b) Uzel bude $\mathcal{P}$ pozice, pokud všechny uzly z pozice vedou do pozice $\mathcal{N}$.
4. Hráč I má vyhrávající strategii právě tehdy, když uzel m (tj. počáteční konfigurace) je označen jako $\mathcal{N}$ pozice.

Poznámka: Co se stane, pokud $1 \notin S$? Například, pokud $2 \in S$ je $0, 1$ $\mathcal{P}$ pozice a $2, 3$ je $\mathcal{N}$ pozice. Další hodnoty budou záviset na dalších prvcích množiny S. Pokud by byla $S = 2$, potom n je $\mathcal{P}$ pozice právě když $n \equiv 0, 1 (\mod 4)$ a n je $\mathcal{N}$ právě když $n \equiv 2, 3 (\mod 4)$.

Úlohy 1.29. Následující hry jsou hrami dvou hráčů, označujeme je I a II, I. hráč ve hře začíná. Problémem je nalézt a popsat vítěznou strategii pro jednoho z hráčů. Řešení hry znamená nalézt takovou vítěznou strategii, bez ohledu na možné tahy protihráče.

1. (a) Na stole leží 25 kamenů. V každém tahu hráč může odebrat jeden až čtyři kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.
   (b) Zahrajte si stejnou hru, ale s 24 kameny.
   (c) Zahrajte si stejnou hru, ale s n kameny!
2. (a) Mějme dvě hromádky kamenů, na jedné 7 a na druhé 11 kamenů. V každém tahu hráč může odebrat libovolný počet kamenů, ale pouze z jedné hromádky. Poslední hráč vyhrává.

[2] Hráč na tahu, který již nemůže táhnout, prohrál a druhý hráč vyhrál.

   (b) Úlohu také řešte pro hromádky o velikosti m a n.
3. (a) Hráči vytvářejí dvaceticiferné číslo. V každém tahu zleva do prava dopisují jednu cifru. První hráč vyhraje, není-li výsledek dělitelný 7, jinak vyhraje II. hráč.
   (b) Co můžete očekávat, nahradíme-li číslo 7 číslem 13?
4. Je dán konvexní n-úhelník, hráči střídavě označují diagonály. Označené diagonály se nesmějí protínat. Hráč, který nemůže označit svou diagonálu, prohrál.
5. Na hromádce je 25 kamenů. Hráč v každém tahu může odebrat $1, 2$ nebo 4 kameny. Hráč, který nemůže pokračovat (na hromádce již nebudou kameny), prohrál.
6. Na šachovnici 8×8 je raněná věž. Raněná věž se může pohybovat pouze vlevo nebo dolů o libovolný počet políček. Hráč, který nemůže zahrát, prohrál. Úlohu řešte také pro různá postavení věže.
7. Na stole jsou dvě hromádky kamenů. Jedna hromádka obsahuje 10 kamenů, druhá 7. Hráč může odebrat jeden kámen z první hromádky, nebo ze druhé, nebo jeden kámen z obou současně. Hráč, který nemůže zahrát, prohrál.
8. Na počátku hry je na tabuli napsáno číslo 60. Během hry, hráč na tahu, vezme dělitele napsaného čísla na tabuli a odečte od čísla na tabuli tohoto dělitele, atd. Výsledné číslo bude 0. Hráč, který dosáhne číslo 0, prohrál.
9. První hráč zvolí číslo mezi 2 a 9. Druhý hráč toto číslo vynásobí opět číslem mezi 2 a 9. První hráč toto číslo vynásobí číslem mezi 2 a 9, atd. První hráč, který převýší číslo 1000, vyhrál.
10. V jednom řádku je napsáno několik znaků minus. Hráč na tahu vybere jedno minus, nebo dvě sousední a udělá z nich plus. Hráč, který změní poslední minus, vyhrál. Úlohu řešte i pro případ, kdy minus jsou v počátečním postavení nakreslena do kruhu.
11. Na počátku hry je jedna hromádka kamenů. Tahem je rozdělení hromádky na dvě nestejné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.
    (a) Po prvním tahu dvě hromádky obsahují 5 a 11 kamenů. Nalezněte vyhrávající strategii pro druhého hráče.
    (b) Po prvním tahu hromádky obsahují 5 a 11 kamenů. Uveďte příklad, jak druhý hráč by neměl zahrát.
    (c) Který z hráčů má vyhrávající strategii, je-li na počátku na hromádce 11 kamenů.
    (d) Je-li na počátku 22 kamenů, který z hráčů vyhraje?
    (e) Uměli byste úlohu vyřešit obecně?
12. Na stole leží
    (a) 57 kamenů

(b) 50 kamenů
(c) 1000 kamenů
(d) $n > 1$ kamenů.

Hraje se tak, že

- První hráč nemůže odebrat v prvním tahu všechny kameny.
- V následujících tazích hráč nesmí odebrat více kamenů, než jeho soupeř.

Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Příklady 1.30. NIM$[20; 1, 3, 5]$

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

NIM$[18; 1, 2, 5]$

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

NIM$[18; 1, 2, 6]$

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

NIM$[18; 1, 2, 4, 8, 16]$

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

NIM$[18; 1, 3, 9]$

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

NIM$[20; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17]$

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Úloha 1.31. ODEBÍRÁNÍ KAMENŮ. Na hromádce leží 45 kamenů. Dva hráči I. a II. se střídají v tazích, začíná hráč I. V každém tahu je možné z hromádky odebrat 2, 3 nebo 4 kameny. Hráč, který odebere poslední kámen vyhrál. Pokud na hromádce zůstane jeden kámen, hra skončila patem. Rozhodněte, zda hra je s úplnou informací bez náhodných tahů. Ujistěte se, že hra skočí po konečně mnoha tazích.

{ul:1.3} **Úloha 1.32.** (Odebírání kamenů 2)

Na dvou hromádkách je 6 a 7 kamenů. V jednom tahu je možné odebrat dva nebo pět kamenů, vždy ale z jedné hromádky.

1. Pokud cílem hry je odebrat poslední kámen, kdo ve hře vyhraje?
2. Pokud cílem hry je získání sudého počtu kamenů, kdo vyhraje?
3. Pokud cílem hry je donutit protihráče udělat poslední tah.

Úloha 1.33. Na hromádce je 21 kamenů, první hráč odebírá nejvýše dva, druhý hráč odebírá nejvýše tři kameny v každém tahu. Hráči se v tazích střídají a hráč, který odebere poslední kámen vyhrál.

Úloha 1.34. Na hromádce je 121 kamenů. Hráči se v tazích střídají. První z hráčů odebírá 1 nebo 3 kameny, druhý z hráčů odebírá 2 nebo 3 kameny. Prohrává hráč, který nemůže udělat tah. Budou-li oba hráči hrát optimálně, kdo vyhraje?

Úloha 1.35. LASKERŮV NIM.[3] Na stole leží několik hromádek kamenů. Hráči se v tazích střídají. V jednom tahu hráč může odebrat nenulový počet kamenů z jedné hromádky, nebo rozdělit hromádku na dvě neprázdné. Prohrává hráč, který nemůže udělat tah.

1. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost pro jednu hromádku s n kameny.
2. Nalezněte vyhrávající tahy v pozici se třemi hromádkami s $2, 5$ a 7 kameny.

Úloha 1.36. Na hromádce je n kamenů. V každém tahu je možné rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

1. Kdo vyhraje v optimální hře v závislosti na n?
2. Je odpovídající Sprague–Grundyova posloupnost períodickou?
3. Doplníme-li pravidlo hry, že hromádky se mohou rozdělit na dvě nestejné hromádky, řešte úlohu znova.

Úloha 1.37. RAYLES. V rovině jsou narýsovány body. V každém tahu je dovoleno sestrojit uzavřenou křivku, která prochází jedním nebo dvěma body, ale neprotíná a ani se nedotýká dříve nakreslených křivek. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Dokažte, že tato hra je ekvivalentní hře s odebíráním předmětů s těmito pravidly: V každém tahu je možné odebrat jeden, nebo tři kameny a případně rozdělit hromádku na dvě.

Úloha 1.38. CHOMP![4] Čokoláda je rozdělena na dílky. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč odebere jeden dílek a s ním všechny nad a vpravo. S těmito dílky se již nehraje. Hráč, který je donucen odebrat levý dolní dílek prohrál.

[3] Emmanuel Lasker, mistr světa v šachu v letech 1894–1921, úloha z knihy *Brettspiele der Völker* (1931)

[4] F. Shuh, 1952

Úloha 1.39. (NIM) Na stole leží několik hromádek kamenů. V každém tahu je možné vzít libovolný počet kamenů z jedné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál. {ul:nim}

1. Kdo vyhraje hru na dvou hromádkách s 11 a 22 kameny?
2. Kdo vyhraje, pokud na stole leží 5 hromádek s $6, 7, 8$ a 9 kameny?

Úloha 1.40. NIM NA SCHODECH.[5] Na stupních schodů leží kameny. V každém tahu je možné přemístit libovolný počet kamenů z jednoho stupínku níže. S kameny, které již nejsou na schodech, se dále nehraje. Hráči se v tazích střídají, hráč, který udělá poslední tah, vyhrál.

1. Dokažte, že tato hra je ekvivalentní hře NIM z úlohy 1.39.
2. Kdo vyhrahe v pozici $[6, 7, 5, 0, 4, 1]$, na prvním stupínku leží šest, na druhém 7 atd. kamenů.
3. Kdo vyhraje v pozici $[1, 0, 0, 2, 4, 0, 5]$?

Úloha 1.41. (Kameny na šachové desce) Na políčkách šachové desky leží kameny. V jednom políčku může ležet více kamenů. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu je možné přemístit jeden kámen o jedno políčko dolů, nebo o libovolný počet políček vlevo. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Na počátku hry leží kameny v horní vrstvě, v každém políčku jeden kámen. Kdo vyhraje v této hře?

Úloha 1.42. Na hromádce je 1111 kamenů. První hráč může odebírat 2 nebo 3 kameny, druhý hráč může odebírat 3 nebo 4 kameny. První hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Kdo vyhraje v této hře?

Úloha 1.43. Řešte úlohu 1.32 pomocí Sprague–Grundyovy posloupnosti.

Úloha 1.44. BACHETOVA ÚLOHA.[6] Dva hráči pokládají na střed stolu jeden až deset kamenů. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který dovrší počet kamenů na 100, vyhrál.

Úloha 1.45. Na stole leží dvě hromádky kamenů, na každé z nich po 8 kamenech. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu je možné odebrat libovolný počet kamenů z jedné, nebo stejný počet kamenů současně z obou hromádek. Kdo v této hře vyhraje? Může si první hráč zabezpečit vítězství?

Úloha 1.46. Na šachovnici je postavena dáma. Její dovolené tahy jsou dolů, vpravo, nebo dolů vpravo. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Kdo ve hře vyhraje?

[5] R. Sprague, 1937

[6] C. G. Bachet, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, 1612

Úloha 1.47. Sudá vyhrává. Na hromádce leží 13 kamenů. Hráči se v tazích střídají, v každém tahu odebírají jeden až čtyři kameny. Vyhraje hráč, který odebere sudý počet kamenů. Kdo ve hře vyhraje?

Úloha 1.48. Take-Aways games. Na hromádce je n kamenů. Dva hráči se v tazích střídají. V prvním tahu hráč odebere libovolný počet kamenů, ale ne celou hromádku. V následujících tazích hráč může odebrat nejvíce polovinu kamenů předcházejícího odebraného počtu kamenů. Může první hráč ve hře vyhrát?

Úloha 1.49. (Deset fazolí) Na hromádce leží deset fazolí. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč může odebrat jednu, nebo dvě fazole. Hráč, která odebere poslední fazoli, vyhrál.

Úloha 1.50. (Dvě hromádky.) Na stole leží dvě hromádky předmětů. Na jedné hromádce je 6 předmětů a na druhé hromádce je devět předmětů. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který je na tahu, odebere z jedné, z druhé, nebo z obou zároveň nejvýše tři předměty. Hráč, který odebral poslední předmět, vyhrál.

Úloha 1.51. (Čtyři nebo pět.) Na stole leží dvě hromádky kamenů. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který je na tahu, může odebrat nejvýše čtyři kameny z první hromádky, nebo nejvýše pět kamenů z druhé hromádky, vždy ale nejméně jeden kámen. Vyhrává hráč, který odebral poslední kámen.

Úloha 1.52. (Nim 21) Hraje se s 21 kameny. Hráči se v tazích střídají. Tahem je odebrání 1, 2 nebo 3 kamenů. Vyhrává hráč, který odebere poslední kámen (normální varianta hry Nim 21).

Úloha 1.53. Přirozeným zobecněním hry Nim 21 je hra s jiným počtem kamenů (Bachetova hra Nim s počtem mezi 15 a 25 kameny), popř. s jinou množinou dovolených tahů (třeba mocniny dvou, čtvercová čísla, prvočísla, odebírání 1,3 nebo 4 předměty, hry s nepravidelným vyloučením, hry na více hromádkách, odebírání nevlastních dělitelů, …). Půlený Nim: Z hromádky kamenů hráč může odebrat nejvýše polovinu kamenů. Hra se hraje v normální variantě. Vyhrávající strategie pro druhého hráče je udržování pozic v hodnotách $k = 3.2^{n-1} - 1$, pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a Proporciální Nim: Počáteční pozice je hromádka kamenů. Dovoleným tahem je odebrání z hromádky o n předmětech kladný počet kamenů, ostře menší než $n/2 + 1$. Hráč, který odebral poslední předmět, vyhrál.

Úloha 1.54. (Nim) Na hrací desce máme několik hromádek mincí (Obvykle tři hromádky se 3, 5 a 7 mincemi). Hráči se v tazích střídají. Hráč, který je na tahu, může odstranit libovolný nenulový počet mincí z některé hromádky. Vyhrává: hráč, který odebere poslední minci (normální varianta).

Úloha 1.55. (Marienbad.) Hra Marienbad je speciální verze obecnější hry Nim. Na stole leží čtyři hromádky po 1, 3, 5 a 7 kamenech. Hru hrají dva hráči, střídají se v tazích. Tahem je sebrání libovolného nenulového počtu kamenů, ale vždy pouze z jedné hromádky. Hráč, který táhnul naposledy, vyhrál! Na začátku hry se zvolí třeba losem, kdo bude ve hře začínat;

Úloha 1.56. (Stříbrný dolar a dědictví.) Na počátku hry Stříbrný dolar nebo Dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček $1, 2, \ldots, 16$, vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamene vlevo na prázdné pole. Ve variantě Stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty Dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.

Úloha 1.57. (Zlatý dolar.) Na pásku rozděleném na jednotlivá políčka jsou rozmístěny mince, z nichž jedna je zlatý dolar. Pásek končí na hraně stolu. Hráči se v tazích střídají. Tah hráče spočívá v přesunutí libovolné mince doleva ke hraně stolu. Pokud je mince přemístěna až za hranu stolu, je ze hry odstraněna. Na polích je nejvýše jedna mince, žádná mince se nesmí přeskočit. Minci lze přesunout maximálně k bezprostředně předcházející minci. Vyhrává hráč, který odebere ze stolu „zlatý dolar“.

Úloha 1.58. (Kayles.) Hra Kayles se hraje s kuželkami postavenými v jedné řadě. Hráči se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na tahu, může odebrat jednu, nebo dvě kuželky, které spolu bezprostředně souvisí. Kdo je na tahu, a nemůže již zahrát pravidly povolený tah, prohrál (normální varianta), tj. v řadě již není žádná stojící kuželka. Poznámka: Hra Kuželky (Kayles.) se někdy hraje tak, že je možné položit pouze dvě vedle sebe stojící kuželky. S osamělými a položenými kuželkami se již dále nehraje. Této variantě se říká Dawson's Kayles.

Úloha 1.59. (Daisy.) Mince jsou postaveny tentokrát do kruhu. Hráči se v tazích střídají. Tahem je odebrání jedné mince, nebo dvou sousedních. Vyhrává hráč, který odebral poslední minci.

Úloha 1.60. (Převracení želv.) (Turning turtles.) Mince jsou položeny v jedné řadě, některá lícem, jiné rubem nahoru. Hráči se v tazích střídají. Hráč otočí jednu minci z líce na rub a může otočit i jiné mince vlevo od vybrané. Vyhrává: Hráč, který jako první dosáhne, že všechny mince jsou naruby. Analyzujte hru v postavení O O P P O P P (orel, panna).

Úloha 1.61. (Převracení nejvýše tří želv.) Mince jsou položeny v jedné řadě, některá lícem, jiné rubem nahoru. Hráči se v tazích střídají. Pravidla: Hráč otočí jednu minci z líce na rub a může otočit i jiné mince (ale nejvýše 3) vlevo od vybrané. Koncová pozice: Vyhrává hráč, který jako první dosáhne, že všechny mince jsou naruby. (Je hra skutečně konečná?)

Úloha 1.62. (MOOREŮV NIM$_k$) Na hrací desce máme několik hromádek mincí. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který je na tahu, může odstranit mince z libovolných k hromádek (počet mincí ze které je libovolný), přitom ale musí odebrat alespoň jednu minci. Vyhrává hráč, který odebere poslední minci (normální varianta).

Úloha 1.63. (POKER NIM.) Základní postavení: Na stole je několik hromádek předmětů. Hráči na začátku mají ještě v kapse každý stejný počet předmětů. Pravidla: Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč, který je na tahu, může, stejně jako ve hře NIM, odebrat libovolný kladný počet předmětů z libovolné hromádky, nebo přidat nenulový počet předmětů z kapsy na nějakou hromádku. Koncová pozice, vyhrává: jako obvykle hráč, který odebere poslední předmět ze stolu.

Úloha 1.64. (AUTOBUS.) Základní postavení: Hraje se jako obvyklý NIM na několika hromádkách. Pravidla: Tahy jsou jako v NIMu (hráč vybere libovolnou hromádku a z ní odebere kladný počet předmětů) a navíc s tímto tahem: Hráč, který je na tahu, může vybrat hromádku, odebrat z ní nenulový počet předmětů a tyto předměty přidat na nějakou jinou hromádku. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který táhne jako poslední. První hráč, který již nemůže táhnout, prohrál. Nápověda: Strategie je stejná, jako v obyčejném NIMu. Pokud první hráč je v nulové pozici, odebere a přesune nějaké kameny, druhý hráč tyto kameny odebere.

Úloha 1.65. (NORTHCOTTOVA HRA.) (Tato hra sice není nestrannou, ale může se analyzovat jako nestranná): Základní postavení: Hraje se na šachovnici s bílými a černými pěšci, v každém řádku je po jednom černým a jednom bílým pěšci. Bílý hráč tahá s bílými figurami, černý s černými. Hráči se v tazích střídají. Pravidla: Pěšci mohou táhnout vpřed i vzad, ale nesmí se přeskakovat. Musíte přesunout jednu z vašich figurek na jiné volné místo v téže řadě. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který táhne jako poslední. (Návod: Všimněte si políček mezi kameny!) tato hraje variantou hry AUTOBUS.

Úloha 1.66. (WYTHOFFOVA HRA.) Základní postavení: Dvě hromádky s m, n mincemi. Hráči se v tazích střídají. Pravidla: Na tahu můžete odstranit libovolný počet mincí z jedné hromádky, nebo stejný počet mincí z obou hromádek současně. Vyhrává hráč, který odebere poslední minci. (Nalezněte vzorec pro vítězné pozice v této hře! Sprague–Grundy posloupnost je periodická. Úlohu řešte pro postavení (16,23).) Pozn. hru je možné zobecnit např. tak, že se mince mohou odebírat ze tří, popř. ze všech hromádek současně.

Úloha 1.67. (Dvojrozměrný Nim.) Hraje se na čtvercové síti, kde je umístěn konečný počet kamenů (na jednom poli může být i více kamenů). Hráči se v tazích střídají. Tah spočívá v přesunu jednoho kamene směrem vlevo ve stejném řádku, nebo na pole v některém nižším řádku. Vyhrává hráč, který odebere poslední kámen. Nalezněte vzorec pro vítězné pozice v této hře. Varianta této hry připouští tahy s celou hromádkou dolů, nebo vlevo, popř. odebrat z hromádky předmět.

Úloha 1.68. (Hra Nim na schodech.) Na jednotlivých n stupních schodů jsou položeny kameny (na jednom poli může být i více kamenů). Hráči se v tazích střídají. Tah spočívá v přesunu několika kamenů (alespoň jednoho) o schod níže. S kameny, které dosáhnou 0tého stupně, se dále již nehraje. Koncová pozice, vyhrává: všechny kameny jsou již na 0tém schodu, poslední hráč, který táhnul, vyhrává.

Úloha 1.69. (Hra Grundy.) Základní postavení: Hromádka obsahující N kamenů. Pravidla: Hráči se v tazích střídají. Hráč vybere libovolnou hromádku a tu rozdělí na dvě nenulové hromádky s různým nenulovým počtem mincí. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah.

Úloha 1.70. (Antigrundy hra.) je nestranná hra dvouhráčů na hromádkách s fazolemi. Počet fazolí na každé hromádce musí být kladný. Jako obvykle vyhrává hráč, který táhne jako poslední. Hráči se pravidelně ve svých tazích střídají. Tahem je označení nějaké hromádky a její rozdělení na dvě nebo více hromádek, ale tak, že nově vzniklé hromádky mají stejný počet. Např. označíme-li hromádku s n fazolemi symbolem n, potom 6 může být $2 + 2 + 2$, nebo $3 + 3$, §$nebo$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,§ po následujícím tahu můžeme např. dostat: $1 + 1 + 2 + 2$ a pod.

Úloha 1.71. (Laskerův Nim.) Základní postavení: Hromádky kamenů. Pravidla: Hráč vybere libovolnou hromádku a tu rozdělí na dvě nenulové hromádky, nebo z libovolné hromádky odebere nenulový počet kamenů. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah.

Úloha 1.72. (Peggy Nim.) Základní postavení: Hromádky kamenů. Pravidla: Hráč může odebírat z jedné hromádky sudý počet kamenů (ale ne celou). V případě, že na hromádce je lichý počet kamenů, může odebrat i celou hromádku. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah. Nápověda: Úlohu řešte nejdříve pro jednu hromádku, nalezněte Grundyovu funkci a použijte součet her. Ukažte, že např. postavení (7,6,8,4) je nenulové, prvním dobrým tahem je odebrání celé první hromádky.

Úloha 1.73. (BÍLÁ VĚŽ O TŘI.) Základní postavení: Šachovnice s jednou bílou věží. Pravidla: Věž se může posunout po řádcích vlevo, po sloupcích dolů, vždy ale nejvýše o tři políčka. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah. (Ta hra je ekvivalentní s jednou již dříve uvedenou hrou: hra Nim se dvěma hromádkami, a s tahy odebírání 1–3 předmětů s tím, že v každém tahu si hráč může svobodně vybrat ze které hromádky předměty odebere!)

Úloha 1.74. (ŠESTNÁCT VĚŽÍ.) Základní postavení: Šachovnice s osmi bílými a černými věžemi v základním postavení na prvním, resp. osmém řádku. Pravidla: Věže se mohou posunovat nahoru nebo dolů (po sloupcích). Cílem hry je zamezit pohybu věží protihráče. Začíná bílý hráč. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, prohrává: hráč, již nemůže táhnout. (Tato hra není ani kombinatorickou hrou, dovoluje opakování tahů). Nápověda 1: Hru nejdříve hrajte na menší šachovnici. Nápověda 2: Soustřeďte se na vzdálenost mezi dvěma protilehlými věžemi. Počet prázdných políček bude odpovídat počtu předmětů na hromádce ve hře Nim.

Úloha 1.75. (WYT QUEEN.) Základní postavení: Šachovnice s jednou bílou královnou. Pravidla: Královna se může posunout po řádcích vlevo, po sloupcích dolů, popř. po diagonále vlevo dolů, a to o libovolný nenulový počet poliček. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který udělal poslední tah. Hra se hraje i s více figurami. Zahrajte si také některou variantu této hry (Věž: tahy pouze vlevo nebo dolů; Jezdec: tahy dolů nebo vlevo.).

Úloha 1.76. (EUKLIDOVA HRA.) Základní postavení: Je dána uspořádaná dvojice (x, y) kladných celých čísel x, y. Pravidla: Hráč, který je na tahu, může odečíst od většího čísla nenulový celočíselný násobek menšího čísla tak, aby výsledek byl ještě kladný. Hráči se v tazích střídají. Koncová pozice, prohrává: hráč, který je na tahu a nemůže již táhnout. Prohrávající pozice jsou (d, d), kde $d = \text{NSD}(x, y)$. Poslední hráč, který zahrál svůj tah, vyhrál.

EUKLIDOVA HRA se někdy zobecňuje: pravidla hry jsou stejná až na to, že odebírat lze jen jisté násobky pevně stanovených čísel.

Pokud není uvedeno jinak, nalezněte vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů.

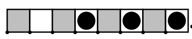
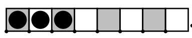
Úloha 1.77. (15 OŘECHŮ.) Na stole leží 15 ořechů. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu hráč odebere alespoň jeden, ale ne více jak polovinu ořechů. Prohraje hráč, který nemůže táhnout. Úlohu řešte také pro libovolný počet ořechů.

Úloha 1.78. (11 ZÁPALEK.) Na stole je 11 zápalek (nebo jiných předmětů). První hráč odebírá jednu, dvě nebo tři zápalky. Druhý hráč odebírá stejný počet. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který odebere poslední zápalku prohrává (betlová varianta).

1. Může první hráč vyhrát? (Bez ohledu na možné tahy druhého hráče.)
2. A co když je na stole 30 zápalek místo 11?
3. Úlohu řešte obecně, tj. pro n kamenů a v jednom tahu je možné odebrat p zápalek.

Úloha 1.79. (30 ZÁPALEK.) Na stole je 30 zápalek. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč odebere nejvíce 6 zápalek. Hráč, který odebere poslední zápalku, vyhrál. Jak musíte hrát, abyste vyhrál?

Úloha 1.80. (WYTHOFFOVA HRA.)[7] Na stole jsou dvě hromádky kamenů, nebo jiných předmětů. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu hráč a) může odebrat libovolný počet kamenů z jedné hromádky nebo b) stejný počet kamenů z obou současně. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Vyhrávající pozice jsou třeba WYTH$[1,0]$ nebo WYTH$[n,n]$, podle pravidla a) nebo b). Pozice WYTH$[1,2]$ je prohrávající. Vyšetřete pozice WYTH$[1,n]$ a nalezněte další prohrávající pozice.

Úloha 1.81. Na proužku papíru jsou tři kameny, jako na obrázku . Hráč na tahu může přemístit kámen vlevo libovolně, nesmí ale žádný kámen přeskočit. Na každém poli musí být nejvýše jeden kámen. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který udělal poslední tah, vyhrál. Koncová pozice je .

Úloha 1.82. (100 KAMENŮ.) Na stole leží 100 kamenů. Dva hráči střídavě odebírají 1 až 5 kamenů. Prohrává hráč, který odebere poslední kámen. Nalezněte vyhrávající strategii pro prvního hráče.

Úloha 1.83. (BACHETOVA ÚLOHA.) Francouzský básník a matematik Bachet[8] v Lyonu v roce 1612 publikoval roztomilé čtení *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. V knize je jako problém 22 uvedena tato úloha: Dva hráči postupně říkají čísla od 1 do 10. Vyhrává hráč, který jako první dosáhne součtu 100. Kdo ve hře vyhraje?

Úloha 1.84. (121 KAMENŮ.) Na hromádce je 121 kamenů. Dva hráči L a R střídavě odebírají z hromádky kameny. Začíná hrát L. Hráč L může odebírat 1 nebo 3 kameny, hráč R v jednom tahu může odebrat 2 nebo 4 kameny. Prohrává hráč, který nemůže udělat podle pravidel tah. Který z hráčů vyhraje? Pokud vyhraje L, jaký udělá první tah?

[7] 1907, tato hra byla známa dříve v Číně jako hra s obebíráním kamenů, *tsyanshidzi.*

[8] Claude Gaspar Bachet de Meziriac také přeložil z řečtiny do latiny Diofantovu *Aritmetiku*, kterou studovat P. Fermat a při jejím studiu přišel na svou velkou větu.

Úloha 1.85. (SUDÁ VYHRÁVÁ.) Na hromádce je 135 kamenů. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu mohou odebrat 1 až 4 kameny. Vyhraje hráč, který odebere sudý počet kamenů. Pro kterého hráče je hra výhodná? Pokud ve hře vyhraje první hráč, jak bude vypadat jeho první tah?

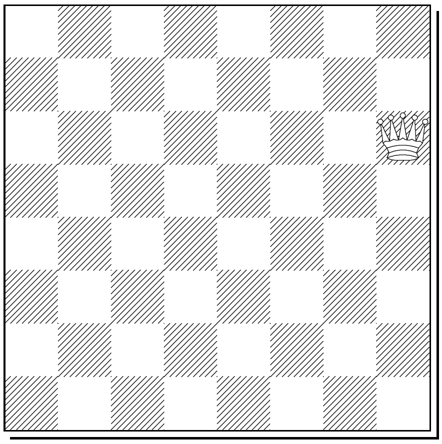


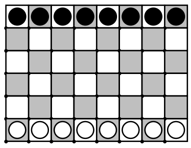
Diagram W

Úloha 1.86. Na políčku $h6$ šachovnice je postavena dáma (jako na diagramu W). Dáma má dovoleno posunout se vlevo, dolů nebo diagonálně vlevo-dolů. Hru hrají dva hráči. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který umístí dámu na políčko $a1$, vyhrál (normální varianta). Pro koho je hra výhodná? Začne-li první hráč, jaký tah udělá?

Úloha 1.87. Na stole leží n kamenů. Dva hráči L a R střídavě odebírají několik kamenů. L může odebírat pouze 1 nebo 2 kameny, R odebírá 3 nebo 4 kameny. Prohrává hráč, který nemůže podle pravidel táhnout. Kdo vyhraje (oba hráči hrají optimálně), je-li na hromádce a) $n = 132$ nebo b) $n = 175$ kamenů. Úlohu řešte pomocí zpětné indukce a nezapomeňte, že na začátku je losem určeno, který z hráčů začíná.

Úloha 1.88. Úloha je stejná jako předcházející. Tentokrát ale L bude odebírat 1 nebo 3 kameny, R bude odebírat 2 nebo 4 kameny a hra se bude hrát v betlové variantě, tj. hráč, který udělal poslední tah prohrál. Úlohu řešte pro $n = 321$ a pro $n = 383$.

Úloha 1.89. (TIOUK-TIOUK.) Africká hra, která je variantou čínské hry *fan-tan* a NIM. Šachovnice se používá se sudým počtem sloupců a různého počtu řádků. Na počátku hry jsou figurky dvou hráčů srovnány v prvním a posledním řádku. Pohyb figurek je možný pouze ve sloupcích nahoru i dolů, ale bez možnosti přeskakování. Cílem hráčů je blokování soupeře. Když jsou blokovány všechny figurky hra končí. Například počáteční postavení je 6×8 jako na obrázku.



Například zahraje-li hráč z $e6$ na $e2,$ druhá figurka je blokována. Přesune-li svou figurku $g1$ na $g4,$ protihráč může zahrát z $g5$ na $g6,$ a podle potřeby figurky mohou jít i zpět. V základním postavení existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.

Úloha 1.90. (DAISY.) Trhají se okvětní lístky heřmánku. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu je možné utrhnout jeden lístek, nebo dva sousední lístky. Vyhraje hráč, který odebere poslední lístek.

Úloha 1.91. Na jedné hromádce je 18 bonbónů, na druhé 23. Dva hráči střídavě sní jednu hromádku a druhou rozdělí na dvě hromádky. Hráč, který nemůže hromádku rozdělit (na hromádce zůstal jeden bonbón), prohrál. Existuje pro prvního hráče vyhrávající strategie?

Úloha 1.92. Přeložte do jazyka hry NIM následující tři hry na šachové desce $n \times m$:

1. V pravém horním políčku šachovnice stojí král. V jednom tahu král se může přesunout vlevo, dolů, nebo vlevo dolů. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. Vyhraje hráč, který dosáhne políčko vlevo dole.
2. V pravém horním políčku šachovnice stojí dáma. V jednom tahu dáma se může přesunout vlevo, dolů, nebo vlevo dolů. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. Vyhraje hráč, který dosáhne políčko vlevo dole.
3. V pravém horním políčku šachovnice stojí věž. V jednom tahu se věž může přesunout vlevo nebo dolů. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. Vyhraje hráč, který dosáhne políčko vlevo dole.

Kdo vyhraje při optimální hře? První hráč, nebo jeho soupeř?

Úloha 1.93. Na stole leží tři hromádky kamenů. Dva hráči střídavě odebírají kameny z hromádek, přičemž v každém tahu odeberou pouze z jedné hromádky nenulový počet kamenů. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen. Nalezněte strategii vyhrávajícího hráče! Řěšte i betlovou variantu této úlohy.

Úloha 1.94. Na šachové desce 7×7 dva hráči střídavě barví políčka tak, aby a) neměly společné strany, b) společné vrcholy. Prohraje hráč, který nemůže udělat tah. Kdo vyhraje, hrají-li oba hráči optimálně?

Úloha 1.95. STŘÍBRNÝ DOLAR A DĚDICTVÍ Na počátku hry stříbrný dolar nebo dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček

$1, 2, \ldots, 16,$ vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamenu vlevo na prázdné pole. Ve variantě stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.

Úloha 1.96. (AUTÍČKO.) Na proužku papíru jsou čtverečky označené $0, 1, 2, \ldots, 15$. Dva hráči střídavě posouvají kámen o $1, 2$ nebo 3 políčka vlevo. Hráč, který nemůže posunout kámen, prohrál. V jakých pozicích vyhraje první (začínající) hráč?

Prohrávající pozicí se nazývá pozice, ze které hráč na tahu prohraje. Vyhrávající pozicí se nazývá pozice, ze které hráč na tahu vyhraje.

Úloha 1.97. (NA ŠACHOVNICI.) Na počátku hry stojí pěšec v levém dolním rohu šachovnice. Petr a Lenka střídavě posouvají pěšec na sousední pole: vlevo nahoru, nahoru, vpravo nahoru, vpravo nebo vpravo dolu. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Kdo vyhraje, hrají-li oba optimálně?

Hrát optimálně znamená: pokud hráč může táhnout do vyhrávající pozice, tak tam táhne; nedělá záměrné chyby.

Úloha 1.98. (LUCASOVA.) Na stole leží dvě hromádky zápalek. Na jedné je 20 a na druhé 25 zápalek. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu si hráč vybere jednu hromádku a tu rozdělí na dvě. Prohraje hráč, který nemůže táhnout, tedy na hromádkách je po jednom kamenu. Kdo v této hře vyhraje, hrají-li oba hráči optimálně?

Úloha 1.99. (VÝROČNÍ ÚLOHA.) Dva hráči odebírají od jednoho do pěti kamenů z hromádky 2014 kamenů. Hráči se v tazích střídají. Hráč nemůže opakovat předcházející tah soupeře. Kdo vyhraje při optimální hře a jak bude hrát vítěz?

Úloha 1.100. (BACHETOVA HRA.) Hra začíná číslem 4. Jedním tahem je možné přičíst libovolné menší přirozené číslo. Hráči se v tazích střídají. Vyhraje hráč, který dosáhne číslo 1000.

Úloha 1.101. Na stole leží dvě hromádky po 11 kamenech. V jednom tahu je možné z jedné hromádky odebrat dva kameny a z druhé jeden kámen. Hráči se v tazích střídají. Prohraje hráč, který nemůže udělat tah. {pr:symni

Příklad 1.102. (SYMETRICKÝ NIM.) Jsou dány dvě hromádky o n kamenech. Střídavě hráči I. a II. odebírají kladný počet kamenů z nějaké hromádky. Hraje se v normální variantě. Který z hráčů má vítěznou strategii a tuto strategii nalezněte.

Řešení: V obou hromádkách je stejný počet kamenů n. Druhý z hráčů má vyhrávající strategii, II. z hráčů kopíruje tahy I. hráče, protože při každém kole je možné zahrát svůj tah tak, aby obě hromádky měly stejný počet kamenů. Po nejvýše n krocích (tazích) musí hráč odebrat z nějaké hromádky poslední kámen a druhý hráč odebere ze zbývající hromádky poslední kámen a vyhrává.

Příklad 1.103. K dispozici máme pravidelný $2n$ úhelník. Hráči střídavě označují úhlopříčky tak, že vybraná úhlopříčka nesmí protínat dříve vybranou úhlopříčku. Který z hráčů má vyhrávající strategii a jak bude hrát?

Řešení: První z hráčů má vyhrávající strategii. Ve svém prvním tahu označí hlavní diagonálu a rozdělí pravidelný $2n$ úhelník na dvě symetrické části. Nyní se již hrají dvě disjunktní hry a co je dovoleno jednomu z hráčů v jedné části hry, je dovoleno druhému hráči ve druhé části hry druhému z hráčů a tak hráč může kopírovat tahy soupeře.

Příklad 1.104. (HRA pNIM) Hra s odebíráním předmětů, lze odebírat jeden kámen nebo počet kamenů, který je prvočíslo.

Úloha 1.105. (HRA p^nNIM) Hra s odebíráním předmětů, lze odebírat jeden kámen nebo počet kamenů, který je nějakou mocninou prvočísla p.

Příklad 1.106. (HRA NIM$[3, 2, 1.]$) Který z hráčů má vyhrávající strategii? Tuto strategii nalezněte.

Příklad 1.107. (BACHETOVA HRA) Buď $k, n \in \mathbb{N}$; $k \leq n$ pevně. Na stole leží n kamenů. Hráči střídavě odebírají j kamenů $1 \leq j \leq k$. Hraje se opět normální varianty. Který z hráčů vyhraje?

Nápověda: Řešte nejdříve jednodušší varianty, např. speciální případy pro $k = 4$ a $n = 10, 14$. Potom výsledky zobecněte. Vždy předpokládejte, že oba hráči hrají optimálně a hledejte prohrávající pozice. Zpětnou indukcí získáte, že pro $k = 4$ pozice násobků 5 jsou prohrávající.

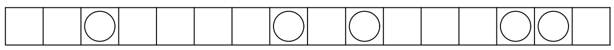
Příklad 1.108. (HRA NIM). Hra začíná s n hromádkami s n_k kameny na každé z nich. Oba hráči střídavě odebírají libovolný kladný počet kamenů, ale pouze vždy z jedné hromádky. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Úloha 1.109. (NORTHCOTTOVA HRA.) (Tato hra sice není nestrannou, ale může se analyzovat jako nestranná.): Základní postavení: Hraje se na šachovnici s bílými a černými pěšci, v každém řádku je po jednom černým a jednom bílým pěšci. Bílý hráč tahá s bílými figurami, černý s černými. Pravidla: Pěšci mohou táhnout vpřed i vzad, ale nesmí se přeskakovat. Musíte přesunout jednu z vašich figurek na jiné volné místo v téže řadě. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který táhne jako poslední. (Návod: Všimněte si políček mezi kameny!).

Úloha 1.110. (KAYLES.) Hráč na tahu vybere jednu, nebo dvě sousedící v jednom řádku, kuželky. Hráč, který odebere poslední kuželku vyhrál.

Úloha 1.111. Na stole leží dvě hromádky kamenů. V každém tahu hráč může odebrat libovolný počet kamenů z jedné hromádky nebo stejný počet kamenů z obou současně. Hra se hraje v normální variantě. Nalezněte algoritmus pro nalezení všech prohrávajících pozic.

Úloha 1.112. (STŘÍBRNÝ DOLAR A DĚDICTVÍ.) Na počátku hry stříbrný dolar nebo dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček $1, 2, ..., 16$, vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamenu vlevo na prázdné pole. Ve variantě stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.



Úloha 1.113. K dispozici máme tři hromádky kamenů. Dva hráči střídavě odebírají kameny. Hráč na tahu si vybere jednu hromádku a z té odebere nenulový počet kamenů. (Vždy musí odebrat kladný počet kamenů, ale vždy pouze z jedné hromádky). Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Počet kamenů v hromádkách označíme ve dvojkové soustavě $\sum a_i 2^i$, $\sum b_i 2^i$, $\sum c_i 2^i$, a položíme $d_i = a_i + b_i + c_i$.

Dokažte:

1. Pokud mezi čísly d_i je jedno nenulové (liché), potom hráč, který ve hře začíná, si může svými tahy vždy zabezpečit výhru nad soupeřem, bez ohledu, jak soupeř bude hrát.
2. Pokud jsou všechna d_i sudá, potom II. hráč si může zabezpečit výhru.

Nápověda: Nechť d_k je liché s největším k. Potom nejméně jedno z čísel a_k, b_k, c_k je rovno jedné. Označme si toto číslo třeba $a_k = 1$. První hráč z této hromádky odebere kameny tak, aby se čísla $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ nezměnila (koeficienty vyšších řádů) a přitom každé číslo $d_k, d_{k-1}, \ldots, d_1, d_0$ se stalo sudým. Samotné číslo a_k se změní na 0, což znamená, že I. hráč odebere z první hromádky alespoň jeden kámen. Druhý hráč je donucen z tohoto rovnovážného stavu udělat alespoň jedno z čísel d_i liché, ale v tom případě opět I. hráč použije stejnou strategii. Hra skončí po konečně mnoha tazích.

Úloha 1.114. Uvažujme hru Nim s dodatečnou podmínkou, kdy je dovoleno v jednom tahu odebrat buď jeden kámen nebo prvočíselný počet $2, 3, 5, \ldots$ kamenů.

1. Nalezněte Grundyovu funkci $\mathcal{G}(P_n)$ pozice P_n, kde n je počet kamenů $0 \leq n \leq 9$.
2. Odhadněte z nalezených hodnot, jak bude dále posloupnost Grundyových čísel pokračovat.
3. Tvrzení dokažte.
4. Použijte pro pozici $(19, 56, 23, 7)$.

Úloha 1.115. Hra 50 kamenů: První tah je odebrání 1 nebo dvou kamenů. V každém následujícím tahu se odebírá nejméně jeden kámen a ne více jak dvojnásobek kamenů v předcházejícím tahu (co odebral protihráč).

Úloha 1.116. Uvažujme hru, která jako hra Nim, je s nulovám součtem (má vítěze a poraženého). Tak jako v Nimu, máme k dispozici dvě hromádky zápalek a dva hráče. Nechť v první hromádce je m a v druhé n zápalek. První hráč začíná a potom se hráči v tazích střídají. V každém tahu si hráč vybere jednu z hromádek a z ní odebere libovolný počet kamenů (může odebrat i celou hromádku). Hráč, který odebere poslední zápalku prohrál (betlová varianta). Dokažte nebo vysvětlete následující závěry:

1. Pokud $m = n = 1$, potom první hráč má vyhrávající strategii.
2. Pokud $m = n > 1$, (např. $m = 6, n = 6$), má vyhrávající strategii druhý hráč.
3. Pokud $m \neq n$, potom existuje vyhrávající strategii pro I. hráče.

Úloha 1.117. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. Na stole leží 9 kartiček s čísly $1, 2, \ldots, 9$. V každém tahu odeberou hráči ze stolu jednu kartičku. Vyhraje ten z hráčů, který odebere tři kartičky a jejich součet bude právě 15. Dokažte, že tato hra je ekvivalentní s hrou Tic-Tac-Toe (hra Křížky a kolečka na 3×3 polích).

Nápověda: Je právě 8 možností trojic, jejiž součet je roven 15. Jsou to: $(1, 5, 9)$, $(1, 6, 8)$, $(2, 4, 9)$, $(2, 5, 8)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 4, 8)$, $(3, 5, 7)$ a $(4, 5, 6)$. Těchto osm trojic můžeme sestavit do Latinského čtverce:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

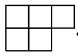
Hledané trojice leží na přímkách. Tedy snahou hráčů je dosáhnout v této tabulce označení tří po sobě jdoucích čísel v nějakém řádku, sloupci, či diagonály.

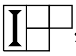
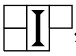
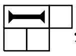
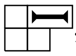
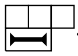
Úloha 1.118. Fibonacciova hra Nim je variantou her s odebíráním kamenů. Hráči odebírají kameny z jedné hromádky, v tazích se střídají. V každém tahu mohou odebrat nejvíce polovinu předcházejícího odebraného počtu kamenů. Hráč, který odebere poslední kámen vyhraje. První hráč nemůže odebrat v prvním tahu všechny kameny.

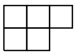
Úloha 1.119. Pro každou z následujících pozic určete:

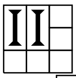
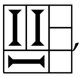
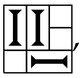
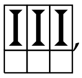
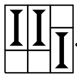
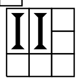
1. zda se jedná o $\mathcal{N}$, či $\mathcal{P}$ pozici.
2. pokud se jedná o $\mathcal{N}$ pozici, nalezněte vyhrávající tah (tah do vyhrávající pozice).

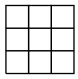
1. NIM$[1, 2, 6, 9]$
2. NIM$[89, 45, 20, 15]$.

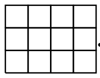
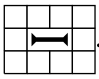
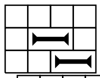
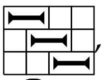
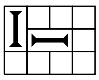
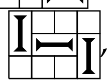
Úloha 1.120. Ve hře CRAM (DLÁŽDĚNÍ) je počáteční pozice . Po prvním tahu dostaneme jednu z následujících pozic:

, , , , .

Tedy hra  je $\mathcal{P}$(existuje vyhrávající strategie pro II. hráče).

Úloha 1.121. Ve hře  jsou možné tahy: , , , . Všechny tyto pozice jsou $\mathcal{N}$. Tedy hra  je $\mathcal{P}$. Uvědomte si, že druhý hráč může vždy zahrát symetricky.

Úloha 1.122. Vyšetřete ještě počáteční pozici ve hře CRAM 

Úloha 1.123. Vyšetříme ještě hru CRAM: . První hráč může položit kostku domina „doprostřed"šachovnice: . Potom, ať druhý hráč zahraje jakkoliv, první hráč může vytvořit symetrický tah a vyhraje. Například na tah  by odpověděl tahem do pozice , na tah  by byl optimální tah , a pod. Tedy počáteční pozice je $\mathcal{P}$.

Úloha 1.124. (HRY S ODČÍTÁNÍM.) (SUBSTRACTION GAMES.) Je dáno kladné celé číslo n a množina S. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu hráči z počáteční pozice postupně odečítají nějaké $s \in S$. Poslední, kdo může hrát, vyhrál. (Hraje se pouze s kladnými n_i). Hru můžeme popsat ekvivalentně jako hromádku s n kameny. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu odeberou několik kamenů s z předem dané množiny S. Najděte $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ pozice ve hrách, když množina S je:

1. $S = \{1, 2, 3\}$
2. $S = \{1, 2, 4\}$

3. $S = \{1, 3, 4\}$
4. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
5. $S = \{1, 3, 6\}$
6. $S = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{2k + 1\}_{k \in \mathbb{N}}$
7. $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} = \{2^k\}_{k \in \mathbb{N}}$
8. $S = \{1, 4, 9, 25, \ldots\} = \{(k + 1)^2\}_{k \in \mathbb{N}}$
9. $S = \{k;\ k \text{ je prvočíslo}\}$.

Ve všech těchto hrách zjistěte a) kdo vyhraje? První nebo druhý hráč, je-li $n = 100$. b) Nalezněte vyhrávající tahy (vyhrávající strategii), pokud existuje, pokud $n = 31$ nebo $n = 56$.

Dále najděte všechny $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ ve hrách s odčítáním, je-li množina S závislá na parametru: i) $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}_{n>0}$, ii) $S = \{1, 2, n\}_{n>2}$.

Úloha 1.125. (Hra 31.)[9] Z balíčku karet se odeberou karty s hodnotami eso, $2, 3, 4, 5$ a 6 všech barev (dohromady 24 karet). Všechny karty se rozloží na stůl lícem vzhůru. Eso se počítá jako jedna. Hráči střídavě obracejí karty a sčítají jejich hodnoty. Hráč, který jako první převýší počet 31, prohrál. Tato hra je podobná hře Nim s $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $n = 31$, ale je tu jeden rozdíl, každou hodnotu je možné použít nejvýše 4krát.

1. Ve hře 31 může vyhrát první hráč. Najděte jeho vyhrávající strategii.
2. Najděte vyhrávající strategii pro hru s odčítáním, tj. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $n = 31$.

Úloha 1.126. (Betlová varianta hry s odčítáním.) $S = \{1, 2, 3\}$, poslední hráč, který udělal tah, prohrál. Cílem hry je donutit protihráče udělat poslední tah – odebrat kámen. Analyzujte hru a najděte $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.127. (Součet Nimu.)

1. Najděte nim součet $27 \oplus 17$.
2. Najděte x takové, aby $25 \oplus x = 38$.

Úloha 1.128. (Nim.) Na stole leží několik hromádek kamenů. Označíme $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ počty kamenů na jednotlivých hromádkách a pozici označíme $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$. Hru hrají dva hráči. Hráči se v tazích střídají. Každý tah spočívá ve vybrání jedné hromádky a z ní hráč odebere nejméně jeden kámen. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Ve hře Nim najděte všechny vyhrávající tahy v pozicích $[12, 19, 27]$ a $[13, 17, 19, 23]$. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice v Nimu, pokud pozice je $[m, n]$ nebo $[1, m, n]$.

[9] G. Mott-Smith, 1954

Úloha 1.129. Najděte vyhrávající strategii (tahy) v pozicích $[1, 1, 2]$, $[1, 5, 12]$ a $[12, 19, 27]$ ve hře betlový Nim.

Úloha 1.130. (Hra s odebíráním kamenů.) K dispozici máme dvě hromádky kamenů. Tah je buď odebrání kamenů z jedné hromádky, nebo z obou současně stejný počet. Úlohu řešte pro pozici 8×6. Tato hra je ekvivalentní Wythoffově hře s dámou. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice, je-li počátek pozice $[8, 8]$. Použijte zpětnou indukci a Eratosthenovo síto.

Úloha 1.131. (Cram.) Na šachovnici je $m \times n$ políček. Hráči střídavě pokládají kostky domina 1×2 na dosud prázdná políčka vertikálně nebo horizontálně. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Kdo vyhraje na desce i) 3×3, ii) $2m \times 2n$ nebo iii) $(2m + 1) \times 2n$.

Hra je zajímavá (viz odpovědi ze cvičení) na desce $(2m + 1) \times (2n + 1)$. Zkuste si hru zahrát na desce 5×5.

Úloha 1.132. (Chomp!.)[10] Máme k dispozici tabulku čokolády. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. V každém tahu hráč si vybere jeden dílek, sní ho a s ním i všechny dílky nad a vpravo. S těmito dílky se již nehraje. Políčko $(1, 1)$ je otrávené; hráč, který je donucen ho sníst, prohrál.

1. Podle pravidel je hra Chomp! betlová. Jak je třeba změnit konfiguraci hry (dílků), aby byla zachována pravidla, ale hrála se hra v normální variantě?
2. Nalezněte vyhrávající strategii na tabulkách 2×2, 3×2, $m \times 2$ nebo $m \times m$, pro $m \geq 3$.
3. Je známo, že ve všech obdélníkových konfiguracích existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Důkaz je čistě existenční, tj. nedává návod, jak odpovídající tahy vypadají. Pokuste se nalézt důkaz tohoto tvrzení. Zkuste nejdříve odebrat políčko (m, n).

Úloha 1.133. (Hra dynamické odčítání.) Hry s odčítáním mohou být zobecněny na hry, kdy množina S bude záviset na posledním tahu soupeře. Například: Máme jednu hromádku n kamenů. První hráč může v prvním tahu libovolný kladný počet kamenů, ale ne celou hromádku. Po tomto prvním tahu se hráči střídají a v každém tahu nemůže hráč odebrat více kamenů, než-li jeho soupeř v předcházejícím tahu.

1. Najděte nejlepší tah v pozici pro $n = 44$.
2. Najděte všechny $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.134. (Fibonacciův Nim.) Pravidla této hry jsou stejná, jako v předcházející hře, ale každý hráč (mimo první tah) může odebrat nejvíce

[10] Fred Schuh, 1952; D. Gale 1974

dvojnásobek kamenů, jako hráč v předcházejícím tahu. Analýza této hry nás přivede k tzv. Fibonacciově posloupnosti $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

1. Najděte optimální tah prvního hráče v pozici pro $n = 43$.
2. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.135. (NIM$_k$.)[11] Moore zobecnil normální variantu hry NIM takto: Na hromádce je n kamenů. Hra NIM$_k$ má stejná pravidla jako obyčejná hra NIM vyjma toho, že v každém tahu hráč může odebrat libovolný počet (alespoň jeden) kamenů současně z k hromádek. Obyčejný NIM je Moorův nim s $k = 1$, tj. Nimt$_1$.

1. Najděte vyhrávající strategii v pozici $[4, 5, 9, 14]$ ve hře NIM$_2$.
2. Najděte optimální vyhrávající strategii v betlové variantě NIM$_k$.

Příklad 1.136. Uvažujme následující SUBSTRAKČNÍ HRY (hry s odebíráním předmětů): Určete, zda pozice $X = 14$ je $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{P}$ pozice. Pokud je to $\mathcal{N}$, určete první vyhrávající tah. Pro každou pozici určete také Grundyovu hodnotu.

1. SUBST$[X; 1, 4, 7]$
   Řešení:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{G}_1(n)$	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1

   Pro $X = 14$ je $\mathcal{G}_1(14) = 1$, $\mathcal{N}$ pozice. Odebrání 1, 4 kamenů. Pro $X = 30$ je $\mathcal{G}_1(30) = 1$ $\mathcal{N}$ pozice. Odebrání 7 kamenů.
2. SUBST$[X; 3, 4, 6]$
   Řešení:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{G}_2(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1

   Pro $X = 14$ je $\mathcal{G}_2(14) = 1$, $\mathcal{N}$ pozice. Odebrání 3, 4 kamenů. Pro $X = 30$ je $\mathcal{G}_2(30) = 1$ $\mathcal{N}$ pozice. Odebrání 3 kamenů.
3. SUBST$[X; 1, 2, 3, 4, 7]$
   Řešení:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{G}_3(n)$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4

   Pro $X = 14$ je $\mathcal{G}_3(14) = 1$, $\mathcal{N}$ pozice. Odebrání 4 kamenů. Pro $X = 30$ je $\mathcal{G}_1(30) = 0$ $\mathcal{P}$ pozice.

Poznámka: Jak hrát, když hráč je v prohrávající pozici? Často používaná metoda je „oddálení“ prohry a odebrání co možná nejmenšího počtu předmětů. Jinou

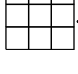
[11] E. H. Moore, 1910

metodou může být minimalizování možných tahů soupeře, tj. postavit soupeře do takové pozice, kde má nejméně vyhrávajících tahů.

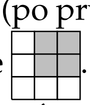
Příklad 1.137. Uvažujme hry NIM na hromádkách kamenů. Pro pozice určete, zda se jedná o $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$ pozici. Pokud se jedná o $\mathcal{N}$ pozici, určete také první vyhrávající tah.

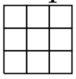
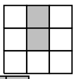
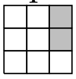
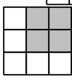
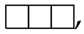
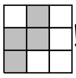
1. $3, 12, 15$
   Řešení: $\bullet 3 + \bullet 12 + \bullet 15 = \bullet 0$, $\mathcal{P}$ pozice
2. $28, 29, 30$
   Řešení: $\bullet 28 + \bullet 29 + \bullet 30 = \bullet 31$. Převedeme počty kamenů na jednotlivých hromádkách do dvojkové soustavy:
   $$\begin{aligned} 28 &= (11100)_2 \\ 29 &= (11101)_2 \\ 30 &= (11110)_2 \\ & (11111)_2. \end{aligned}$$
   Protože
   $$\begin{aligned} 28 &= (11100)_2 \\ 29 &= (11101)_2 \\ 1 &= (00001)_2 \\ & (00000)_2. \end{aligned}$$
   Stačí odebrat z poslední hromádky 29 kamenů. Dalšími možnými tahy jsou $(28, 29, 30) \to (28, 2, 30)$ nebo $(28, 29, 30) \to (3, 29, 30)$.
3. $1, 2, 4, 8, 16$.
   Řešení: $\bullet 1 + \bullet 2 + \bullet 4 + \bullet 8 + \bullet 16 = \bullet(32 - 1)$ je $\mathcal{N}$ pozice (nenulová), jediný možný tah je $(16) \to 1$, tj. odebrání 15 kamenů z poslední hromádky.

Úloha 1.138. Levý a pravý hráč hrají hru CRAM na šachovnici 3×3 polí, na barvě polí nezáleží.

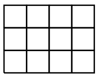
.

Bez ztráty na obecnosti budeme předpokládat, že začíná levý hráč.

1. Vysvětlete, proč (po prvním tahu levého) pravý může vždy (až na symetrii) zahrát do pozice .
2. Může levý hráč v této pozici vyhrát?

3. Odpovězte na otázku, zda výchozí pozice je $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{P}$ pozicí. Z pozice  je možné zahrát prvním tahem do pozic  nebo  a druhý hráč dotáhne požadovaným způsobem. Pozice  je $\mathcal{P}$ pozice, levý hráč prohraje, jsou možné (až na symetrii) dva možné tahy, buď do , nebo do , kde existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Vyšetřete i možnost !

Úloha 1.139. Levý a pravý hráč hrají hru CRAM na šachovnici 3×4 políček.



Levý hráč začíná. Ilustrujte, kam levý hráč umístí svoji první kostku domina a jak odpoví pravý hráč.

Úloha 1.140. 1. Nalezněte nim součet $\bullet 27 + \bullet 17$.

2. Víte-li, že $\bullet 38 + \bullet x = \bullet 25$, nalezněte x.

Řešení:

1. $\bullet 27 + \bullet 17 \overset{bin}{=} (11011)_2 \oplus (10001)_2 = (1010)_2 = \bullet 10$.
2. $\bullet 38 + \bullet x \overset{bin}{=} (100110)_2 + \bullet x = (11001)_2$, tedy $x = (111111)_2 = 63$.

Úloha 1.141. Nalezněte vyhrávající tahy ve hrách NIM$[12, 19, 27]$ a NIM$[13, 17, 19, 23]$. Úlohu řešte i pro betlové varianty!

Řešení:

1. Protože $\bullet 12 + \bullet 19 + \bullet 27 \overset{bin}{=} (1100)_2 \oplus (10011)_2 \oplus (11011)_2 = (100)_2$ je nenulové, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Nespárovaná jednička je ve třetím sloupci pouze u čísla 12. Stačí odebrat 4 kameny z první hromádky.
2. Protože $\bullet 13 + \bullet 17 + \bullet 19 + \bullet 23 \overset{bin}{=} (1101)_2 \oplus (10001)_2 \oplus (10011)_2 \oplus (10111)_2 = (11000)_2$, můžeme odebírat kámen z hromádek, které mají 1 v pátém sloupci. Spočítáme $\bullet 13 + \bullet 24$, $\bullet 17 + \bullet 24$, $\bullet 19 + \bullet 24$, $\bullet 23 + \bullet 24$. Stačí odebrat 8 kamenů z posledních tří hromádek. Uvažte, že počet kamenů se na daných hrách po odebrání musí zmenšit.
3. Since in each case there are at least two heaps of size greater than one, our winning moves remain the same.

Úloha 1.142. Hra NIMBLE se hraje na prvním řádku šachovnice. Políčka jsou označena $0, 1, 2, 3, \ldots$ Na počátku hry je na políčkách konečný počet kamenů, na jednom políčku může být i více kamenů. Tahem budeme rozumět označení nějakého kamene a jeho následný přesun doleva. Je možné jak přeskakování kamenů, tak i položení více kamenů na jedno políčko. Hráči se v tazích střídají a hra skončí, pokud všechny kameny jsou v políčku označeném 0. Poslední hráč, který zahrál tento tah, vyhrál. Uvažte, že tato hra je vlastně jiná varianta hry NIM. V následující pozici se 6 kameny určete, který z hráčů vyhraje. V případě, že výchozí pozice je $\mathcal{N}$, nalezněte vyhrávající tah.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13
				1				2	1	1		1

Řešení: Kámen na $n$tém políčku můžeme interpretovat jako hru NIM s jednou hromádkou a s n kameny. Možné tahy jsou totiž posunutí vlevo o jedno, dvě,... políčka. Pozice na obrázku odpovídá hře NIM$[4, 8, 8, 9, 10]$. Protože $\bullet 4 + \bullet 8 + \bullet 8 + \bullet 9 + \bullet 10 + \bullet 13 \overset{bin}{=} (0100)_2 \oplus (1000)_2 \oplus (1000)_2 \oplus (1001)_2 \oplus (1010)_2 \oplus (1101)_2 = (1010)_2$, je tato pozice nenulová a tedy $\mathcal{N}$ pozicí, tj. existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Ve hře má I. hráč jediný možný správný tah, protože pouze jedna hromádka s $(1010)_2 = 10$ kameny má současně 1 ve čtvrtém a v druhém sloupci. Odebráním celé této hromádky získáme $\mathcal{P}$ pozici.