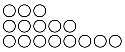
Hra NIM patří ke hrám s úplnou kombinatorickou analýzou. Typická pozice ve hře NIM vypadá takto . Hra se hraje s několika hromádkami (řádky) s několika kameny. Typická pozice je třeba NIM[3, 5, 8]. Při každém tahu si hráč může vybrat libovolný řádek (hromádku) a z něj odebrat (nenulový) počet kamenů. S odebranými kameny se již nehraje. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Každá nenulová počáteční pozice má vyhrávající strategii pro prvního hráče, protože hráč na tahu může odebrat celou hromádku. Je-li hromádka prázdná, existuje vyhrávající strategie pro II. hráče. Jak je to se dvěma hromádkami? Zde záleží na tom, zda hromádky jsou stejné či nikoliv. Pokud obě hromádky obsahují stejný počet kamenů, snadno uvidíme, že existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, protože hráč na tahu může opakovat tah soupeře ve druhé hromádce. Tato strategie se nazývá *kradení strategie.* Hra (indukcí) musí skončit po konečně mnoha tazích. Naopak, obsahuje-li hra dvě nestejné hromádky, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče, protože hráč svým tahem může dorovnat hromádky na stejný počet a použít předcházející strategii.

Kompletní strategii hry NIM objevil harwardský geometr Charles Bouton v roce 1901. Jeho řešení se poměrně snadno popíše. Pro dvě nezáporná celá čísla a, b *nim součet* $a \oplus b$ dostaneme následujícím výpočtem: (1) Prvně obě dvě čísla vyjádříme ve dvojkové soustavě, (2) a potom tato dvě čísla sečteme bez přenosu do vyšších řádů. Příklady jsme již uvedli a čtenář může ověřit např. rovnost $29 \oplus 21 \oplus 11 = 3$.

Je-li G pozice ve hře NIM s hromádkami $a_1, a_2, \dots, a_k$ kamenů, potom *nim hodnota* je definována jako

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k.$$

Pozici G nazveme nulovou, je-li její hodnota nula. Strategii ve hře určuje Boutonova věta:

Věta 0.1 (Bouton)**.** *Nechť G je* NIM *pozice.*

1. *Je-li G nulová pozice, potom každý tah z této pozice vede na nenulovou pozici.*
2. *Není-li G nulová pozice, potom existuje takový tah, který vede do nulové pozice.*

Tedy je-li G nulová pozice, potom existuje vyhrávající strategie pro II. hráče taková, že druhý hráč může zahrát do nulové pozice. První hráč svým tahem poruší vnitřní symetrii postavení. Protože ve hře každým tahem zmenšíme počet kamenů, hra skončí po konečně mnoha tazích a druhý hráč bude mít poslední tah (normální varianta). Naopak, je-li G nenulová pozice, potom první hráč si může zabezpečit vítězství tak, že zatáhne do nulové pozice.

Například předpokládejme, že G má tři hromádky s počty kamenů $29, 21, 11$. Již dříve jsme spočetli, že jejich nim součet je 3. Tato pozice je tedy nenulová a tedy nutně v této hře má vyhrávající strategii první hráč. Není příliš obtížné nahlédnout, že stačí odebrat tři kameny z poslední hromádky o 11 kamenech. Potom bude $29 \oplus 21 \oplus 8 = 0$, tedy výsledná pozice bude nulová.

Důkaz: (Bouton, 1901) Nejdříve předpokládejme, $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0$, a soustředíme se na typický tah $a_1 \to a_1'$. Nutně tedy $a_1 \neq a_1'$ a

$$a_1' \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k \neq a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0.$$

Tah tedy vede do nenulové pozice.

Naopak: Předpokládejme, že

$$x = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k \neq 0.$$

Vezměme cifru nejvyššího řádu čísla x (ve dvojkové soustavě). Nejméně jedno a_i musí mít tuto cifru rovnu jedné. Bez ohledu na obecnost to může být a_1. Položíme $x \oplus a_1 = a_1'$. Nutně $a_1' < a_1$. Potom ale

$$a_1' \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = x \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = x \oplus x = 0.$$

□

Každá pozice ve hře Nim má svůj výsledek: G je nulová hra a druhý hráč si může vynutit vítězství bez ohledu na možné tahy soupeře, nebo první hráč si může vynutit vítězství. Tato úvaha nás vede na rozdělení všech her Nim na dvě disjunktní třídy (množiny). Podotkněme, že pozice dalších her mohou mít různé výsledkové třídy. Zatímco je snadné dokázat, že takové třídy existují (a my to budeme demonstrovat v této knize na mnoha příkladech), současně vypočítat, ke které třídě hra patří bývá obtížné. Jedním z cílů teorie kombinatorických her je určení, k jakému typu hra patří.

Poznamenejme ještě, že Boutonova věta se neaplikuje pouze na jednu počáteční pozici, ale na všechny možné pozice ve hře Nim, s libovolně velkými hromádkami. Říkáme také, že hra Nim je řešitelná a míníme tím, že existuje algoritmus výpočtu výsledkové třídy libovolné pozice.
