Boutonova metoda

Václav Vopravil

1 Úvod do kombinatoriky kombinatorických her

Kombinatorické hry jsou hrami dvou hráčů s úplnou informací, bez náhody a s výsledkem vyhrál nebo prohrál. Teorie her se může rozdělit na partyzánské a nestranné hry.

Partyzánské hry jsou hrami, ve kterých hráči mohou mít z dané pozice různé množiny možných tahů. Často se těmto hrám říká také *barevné* (bílý, černý). *Nestranné hry*, které budou diskutovány v tomto příspěvku, jsou hrami, ve kterých množina možných tahů je stejná pro oba hráče. Podejme jednoduchý příklad takové hry:

1.1 Jednoduchá hra s odebíráním kamenů

Pravidla hry jsou tato:

1. Hru hrají dva hráči, hráč I a hráč II.
2. Na stole leží hromádka 21 kamenů.
3. Tahem je odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů z hromádky. V každém tahu musí být odebrán nejméně jeden, a nejvíce tři kameny, s odebranými kameny se již nehraje.
4. Hráči se v tazích pravidelně střídají, začíná hráč I.
5. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhraje, tj. poslední hráč vyhraje.

Budeme se ptát: Jaká je v této hře optimální strategie pro oba hráče? Může si jeden z hráčů vynutit vítězství? Má začínající hráč výhodu?

Pokud na hromádce zbyde $1, 2$ nebo 3 kameny, hráč, který je na tahu odebere všechny kameny a vyhraje. Předpokládejme, že na stole leží nyní 4 kameny. Potom hráč po svém tahu zanechá na stole $3, 2$, nebo 1 kámen a soupeř vyhraje. Je-li na hromádce $5, 6$ nebo 7 kamenů, hráč na tahu může zahrát tak, aby na hromádce zbyly 4 kameny a vyhraje. Zůstalo-li na hromádce 8 kamenů, hráč na tahu, může táhnout pouze do pozic $7, 6$ nebo 5 kamenů a jeho soupeř tím vyhraje. Pozice $0, 4, 8, 12, 16, \ldots$ jsou prohrávající (pro prvního hráče). Naše hra má ale 21 kamenů. Protože $21 = 4 \cdot 5 + 1$, první hráč může odebrat jeden kámen, zanechá 20 kamenů a vyhraje.

Pozice $0, 4, 8, 12, 16, \ldots$ označujeme $\mathcal{P}$ (*předcházející hráč* má vyhrávající strategii). Ostatní pozice $1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \ldots$ se označují $\mathcal{N}$ pozice, v nich vyhrává *následující hráč*

(hráč na tahu). Poznamenejme, že každý tah z $\mathcal{P}$ pozice vede do $\mathcal{N}$ pozice a alespoň jeden tah z $\mathcal{N}$ pozice vede do $\mathcal{P}$ pozice.

1.2 Hry s odebíráním kamenů $\mathrm{NIM}[S; a]$

Předcházející jednoduchá hra je speciálním příkladem tzv. *her s odebíráním kamenů.*

Pravidla hry:

1. Nechť S je množina kladných celých čísel.
2. Z hromádky o n kamenech hráči střídavě odebírají kameny.
3. Hráč ve svém tahu může odebrat pouze $s \in S$ kamenů.
4. Poslední hráč vyhraje.

Hra v přecházejícím paragrafu byla vlastně hra s odebíráním kamenů s množinou $S = \{1, 2, 3\}$. Podaří se nám nalézt také jednoduchou strategii pro množinu $S = \{1, 3, 4\}$? Pozice 0 je *koncová pozice*, ze které neexistuje tah a tedy jedná se o $\mathcal{P}$ pozici. Potom pozice $1, 3, 4$ jsou $\mathcal{N}$ pozice, protože hráč může odebrat všechny kameny. Zůstává pozice se dvěma kameny. Tato pozice je $\mathcal{P}$ pozice, protože hráč na tahu může odebrat pouze jeden kámen a dostane se do pozice $\mathcal{N}$. Potom ale pozice $2 + 3 = 5$ a $2 + 4 = 6$ jsou $\mathcal{N}$ pozice, protože hráč může zatáhnout do pozice $2 \in \mathcal{P}$. Pozice 7 nutně musí být $\mathcal{P}$ pozice, protože možné tahy jsou pouze do pozic $6, 4$ a 3. Budeme-li pokračovat naznačeným způsobem, odhalíme pravidlo: $8, 10, 11$ jsou $\mathcal{N}$ pozice, 9 je $\mathcal{P}$ pozice, $12, 13$ jsou $\mathcal{N}$ a pozice 14 je opět $\mathcal{P}$ pozice... Tedy množina $\mathcal{P}$ pozic je $\mathcal{P} = \{0, 2, 7, 9, 14, 16, \ldots\}$, tj. $k \equiv 0, 2 \mod 7$, $k > 0$ a zbylé pozice (doplněk) jsou $\mathcal{N}$ pozice, tj. $1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, \ldots$ Výsledky zaznamenejte do tabulky:

kameny	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
pozice	$\mathcal{P}$																		

Posloupnost $PNPNNNN$ má délku 7 a opakuje se. Například ve hře se 100 kameny dostaneme zbytek 2 po vydělení 7 a tato pozice je tedy $\mathcal{P}$ pozice.

1.3 Hra NIM na třech hromádkách

Hra NIM je opět hra s odebíráním předmětů s těmito pravidly:

1. Na stole leží tři hromádky s a, b a c kameny.
2. Dva hráči se v tazích střídají.
3. Každý tah spočívá ve vybrání jedné hromádky a z ní odebrání libovolného počtu kamenů (alespoň jeden, může se odebrat i celá hromádka).
4. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Hra $\mathrm{NIM}[0, 0, 0]$ je koncová pozice a tedy se jedná o $\mathcal{P}$ pozici. Řešení jednohromádkové varianty je triviální: Hráč na tahu odebere všechny kameny a vyhrál, tedy pozice $\mathrm{NIM}[a, 0, 0]$, $a \neq 0$ je $\mathcal{N}$ pozice.

Ve dvouhromádkové variantě je analýza opět jednoduchá. Ve dvouhromádkové variantě jsou $\mathcal{P}$ pozice takové pozice, ve kterých obě hromádky mají stejný počet kamenů. $\textsc{Nim}[a, b, 0]$, $a = b > 0$. Strategie druhého hráče je jednoduchá. Po prvním tahu druhý hráč odebere přesně stejný počet kamenů, ale z druhé hromádky. Naopak, je-li $a \neq b$ prvním tahem se můžeme dostat do $\mathcal{P}$ pozice a tedy $\textsc{Nim}[a, b, 0]$ pro $a \neq b$ je $\mathcal{N}$ pozice (jsou to zbylé pozice).

Soustřeďme se nyní na tři hromádky Pozice $\textsc{Nim}[1, 1, 1]$, $\textsc{Nim}[1, 1, 2]$, $\textsc{Nim}[1, 1, 3]$ a pozice $\textsc{Nim}[1, 2, 2]$ jsou všechny $\mathcal{N}$ pozice, protože prvním tahem se umíme dostat do $\mathcal{P}$ pozice $\textsc{Nim}[1, 1, 0]$ nebo $\textsc{Nim}[0, 2, 2]$.

Další jednoduchá pozice je $\textsc{Nim}[1, 2, 3]$. Tato pozice je nutně $\mathcal{P}$ pozice, protože každým tahem se dostaneme do $\mathcal{N}$ pozice. Pro nalezení dalších $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ pozic použijeme malý trik.

Nim součet $\oplus$ dvou nezáporných celých čísel je jejich součet bez přenosu do vyšších řádů ve dvojkové soustavě (k vyjádření čísel ve dvojkové soustavě se použije algoritmus dělení se zbytkem).

Pozice $\textsc{Nim}[a, b, c]$ je $\mathcal{P}$ pozice právě tehdy a jen tehdy, když jejich nim součet $a \oplus b \oplus c = 0$.

Například pozice $\textsc{Nim}[13, 12, 8]$ má nim součet $13 \oplus 12 \oplus 8 = 9 \neq 0$, protože

$$\begin{array}{rcrcl}
13 & = & 1101_2 & & \\
12 & = & 1100_2 & & \\
\oplus\ 8 & = & 1000_2 & & \\
\hline
 & & 1001_2 & = & 9
\end{array}$$

Nim součet $13, 12, 8$ je 9 (nenulové) a tedy odpovídající pozice $\textsc{Nim}[13, 12, 8]$ je $\mathcal{N}$ pozice. Nalézt odpovídající vyhrávající tah do $\mathcal{P}$ pozice znamená nalézt takovou pozici, ve které bude v každém sloupci sudý počet jedniček. Například stačí odebrat 9 kamenů z první hromádky (na hromádce zůstanou 4 kameny). Naleznete jiná řešení?

Úlohy 1.1. Následující hry jsou hrami dvou hráčů, označujeme je I a II, I. hráč ve hře začíná. Problémem je nalézt a popsat vítěznou strategii pro jednoho z hráčů. Řešení hry znamená nalézt takovou vítěznou strategii, bez ohledu na možné tahy protihráče.

1. (a) Na stole leží 25 kamenů. V každém tahu hráč může odebrat jeden až čtyři kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.
   (b) Zahrajte si stejnou hru, ale s 24 kameny.
   (c) Zahrajte si stejnou hru, ale s n kameny!
2. (a) Mějme dvě hromádky kamenů, na jedné 7 a na druhé 11 kamenů. V každém tahu hráč může odebrat libovolný počet kamenů, ale pouze z jedné hromádky. Poslední hráč vyhrává.
   (b) Úlohu také řešte pro hromádky o velikosti m a n.
3. (a) Hráči vytvářejí dvaceticiferné číslo. V každém tahu zleva do prava dopisují jednu cifru. První hráč vyhraje, není-li výsledek dělitelný 7, jinak vyhraje II. hráč.
   (b) Co můžete očekávat, nahradíme-li číslo 7 číslem 13?
4. Je dán konvexní n-úhelník, hráči střídavě označují diagonály. Označené diagonály se nesmějí protínat. Hráč, který nemůže označit svou diagonálu, prohrál.

5. Na hromádce je 25 kamenů. Hráč v každém tahu může odebrat $1, 2$ nebo 4 kameny. Hráč, který nemůže pokračovat (na hromádce již nebudou kameny), prohrál.
6. Na šachovnici 8×8 je raněná věž. Raněná věž se může pohybovat pouze vlevo nebo dolů o libovolný počet políček. Hráč, který nemůže zahrát, prohrál. Úlohu řešte také pro různá postavení věže.
7. Na stole jsou dvě hromádky kamenů. Jedna hromádka obsahuje 10 kamenů, druhá 7. Hráč může odebrat jeden kámen z první hromádky, nebo ze druhé, nebo jeden kámen z obou současně. Hráč, který nemůže zahrát, prohrál.
8. Na počátku hry je na tabuli napsáno číslo 60. Během hry, hráč na tahu, vezme dělitele napsaného čísla na tabuli a odečte od čísla na tabuli tohoto dělitele, atd. Výsledné číslo bude 0. Hráč, který dosáhne číslo 0, prohrál.
9. První hráč zvolí číslo mezi 2 a 9. Druhý hráč toto číslo vynásobí opět číslem mezi 2 a 9. První hráč toto číslo vynásobí číslem mezi 2 a 9, atd. První hráč, který převýší číslo 1000, vyhrál.
10. V jednom řádku je napsáno několik znaků minus. Hráč na tahu vybere jedno minus, nebo dvě sousední a udělá z nich plus. Hráč, který změní poslední minus, vyhrál. Úlohu řešte i pro případ, kdy minus jsou v počátečním postavení nakreslena do kruhu.
11. Na počátku hry je jedna hromádka kamenů. Tahem je rozdělení hromádky na dvě nestejné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.
    (a) Po prvním tahu dvě hromádky obsahují 5 a 11 kamenů. Nalezněte vyhrávající strategii pro druhého hráče.
    (b) Po prvním tahu hromádky obsahují 5 a 11 kamenů. Uveďte příklad, jak druhý hráč by neměl zahrát.
    (c) Který z hráčů má vyhrávající strategii, je-li na počátku na hromádce 11 kamenů.
    (d) Je-li na počátku 22 kamenů, který z hráčů vyhraje?
    (e) Uměli byste úlohu vyřešit obecně?
12. Na stole leží
    (a) 57 kamenů
    (b) 50 kamenů
    (c) 1000 kamenů
    (d) $n > 1$ kamenů.

    Hraje se tak, že
    - První hráč nemůže odebrat v prvním tahu všechny kameny.
    - V následujících tazích hráč nesmí odebrat více kamenů, než jeho soupeř.

    Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Který z hráčů má vyhrávající strategii?