# Infinitezimální a infinitní čísla

Systém nadreálných čísel je největší (nearchimedovské) uspořádané těleso, které obsahuje všechna reálná čísla. Nosič nadreálných čísel je ale příliš velký na to, aby tvořil množinu (tvoří vlastní třídu). Nadreálná čísla obsahují nejrůznější nekonečná čísla, jako jsou např. $\omega, \omega/2, \sqrt{\omega}, \omega - 1, \omega^2, \ldots$ (kde $\omega$ je ordinální typ $\mathbb{N}$). Nadreálná čísla také obsahují nekonečně malá (infinitesimální) čísla, jako jsou třeba $\varepsilon = 1/\omega, \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon^2, \ldots$

Každé nadreálné číslo je (rekurzivně) definované jako uspořádaná dvojice množin, kde každý prvek z první množiny (nazývané levé) není větší ani roven žádnému prvku druhé množiny (pravé). Vertikála odděluje obě množiny a zbytečné závorky nepíšeme.

Například $\{1, 2 \mid 3, 5, 6\}$ je nadreálné číslo (odpovídající číslu $5/2$), ale $\{0, 2 \mid 1, 3\}$ není nadreálným číslem, protože $2 \geq 1$.

Na nadreálná čísla se můžeme dívat jako na hry dvou hráčů, levého a pravého, ve kterých hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál. Levá množina obsahuje možné tahy levého hráče a pravá jsou možnostmi tahů pro pravého hráče. Nadreálné číslo vyjadřuje míru výhody pro levého hráče. Několik příkladů:

$\{|\} = 0$, je hra, ve které žádný z hráčů nemůže táhnout (druhý hráč vyhraje)

$\{n \,|\} = n + 1$ pro $n \geq 0$, je hra, ve které levý hráč má na výběr $n + 1$ tahů a pravý hráč nemůže táhnout.

$\{| -n\} = -(n + 1)$ pro $n \geq 0$, je hra, ve které pravý hráč má na výběr $n + 1$ tahů a levý hráč nemůže táhnout.

Nadreálná čísla obsahují všechna celá čísla.

$\{0 \mid 1\} = 1/2$, pokud levý zahraje jako první, zahraje do hry 0, ve které žádný z hráčů nemá tah. Pravý může zahrát do 1, ve které (také) vyhraje levý hráč (pravý nemá na výběr žádný tah). Budeme říkat, že levý má výhodu $1/2$ tahů.

$\{0 \mid 1/2\} = 1/4$
$\{0 \mid 1/(2^n)\} = 1/(2^{(n+1)})$

Pravidlo zjednodušení čísel: Nadreálné číslo $\{L \mid R\}$ je nejjednodušší nadreálné číslo $x$ větší než všechny prvky levé množiny $L$ a menší než všechny čísla menší než čísla v množině $R$. Nula je ze všech čísel nejjednodušší. Celá čísla jsou jednoduchá nadreálná čísla, kde celé číslo s menší absolutní hodnotou je jednodušší. Další jednoduchá čísla jsou racionální čísla se jmenovatelem mocniny 2, kde jednodušší dyadické racionální číslo má menší jmenovatel. Další jednoduchá nadreálná čísla jsou reálná čísla, která nejsou dyadická racionální číla a racionální čísla.

Několik dalších příkladů, ve kterých používáme pravidlo zjednodušení:

$\{1 \mid 5, 6\} = 2$
$\{3 \mid 4\} = 7/2$
$\{1/4 \mid 7/8\} = 1/2$
$\{-7 \mid 20\} = 0$
$\{-5, -4 \mid -1\} = -2$
$\{8/10 \mid 9/10\} = 7/8.$

Jsou-li $a_n$ a $b_n$ dvě posloupnosti reálných čísel, konvergujících k reálnému číslu $L$, takových, že $a_n < L < b_n$ pro všechna $n$, potom $\{a_n \mid b_n\} = L$.

Například,
$\{1/4, 1/4 + 1/16, 1/4 + 1/16 + 1/64, \ldots \mid 1/3 + 1/2, 1/3 + 1/4, 1/3 + 1/8, \ldots\} = 1/3.$

Několik příkladů nekonečně velkých (infinitních) čísel:

$\{\mathbb{Z} \mid\} = \omega$, je hra, ve které pravý hráč nemůže táhnout, a levý hráč může táhnout do libovolného konečného celého čísla. Levý hráč zahraje do čísla, ve kterém je konečný počet možných tahů.

$\{\omega \mid\} = \omega + 1$
$\{\omega + n \mid\} = \omega + n + 1$ pro $n \geq 0$
$\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots \mid\} = 2 \cdot \omega$

$\{n \cdot \omega, n \cdot \omega + 1, n \cdot \omega + 2, n \cdot \omega + 3, \ldots \mid\} = (n + 1) \cdot \omega$ pro $n \geq 0$

$\{\omega, 2 \cdot \omega, 3 \cdot \omega, 4 \cdot \omega, \ldots \mid\} = \omega^2$
$\{\mathbb{Z} \mid \omega\} = \omega - 1$
$\{\mathbb{Z} \mid \omega - n\} = \omega - (n + 1)$ pro $n \geq 0$
$\{\mathbb{Z} \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \ldots\} = \omega/2$

$\{\mathbb{Z} \mid \omega/(2^n), \omega/(2^n) - 1, \omega/(2^n) - 2, \omega/(2^n) - 3, \ldots\} = \omega/(2^{(n+1)})$ pro $n \geq 0$

$\{\mathbb{Z} \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \ldots\} = \sqrt{\omega}$

Několik příkladů s nekonečně malými veličinami:

$\{0 \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\} = \varepsilon = 1/\omega$
$\{0 \mid \varepsilon\} = \varepsilon/2$
$\{0 \mid \varepsilon/2\} = \varepsilon/4$
$\{0 \mid \varepsilon/(2^n)\} = \varepsilon/(2^{(n+1)})$ pro $n \geq 0$
$\{0 \mid \varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/4, \varepsilon/8, \ldots\} = \varepsilon^2$

$\{\varepsilon \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\} = 2 \cdot \varepsilon$
$\{2 \cdot \varepsilon \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\} = 3 \cdot \varepsilon$
$\{n \cdot \varepsilon \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\} = (n+1) \cdot \varepsilon$ pro $n \geq 0$
$\{\varepsilon, 2 \cdot \varepsilon, 3 \cdot \varepsilon, 4 \cdot \varepsilon, \ldots \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\} = \sqrt{\varepsilon}$.

Další informace o nadreálných číslech čtenář nalezne v literatuře (Donald Knuth a John Conway), např. čtyři základní operace, přiřazení hodnotám pozice v černobílém Nimu, etc.

## Doporučená literatura


[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[CGT] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)


[2hs03RMF actual snyahoo.tex, 12/05/14, 17:13]