Conwayova teorie na příkladu hry Snort

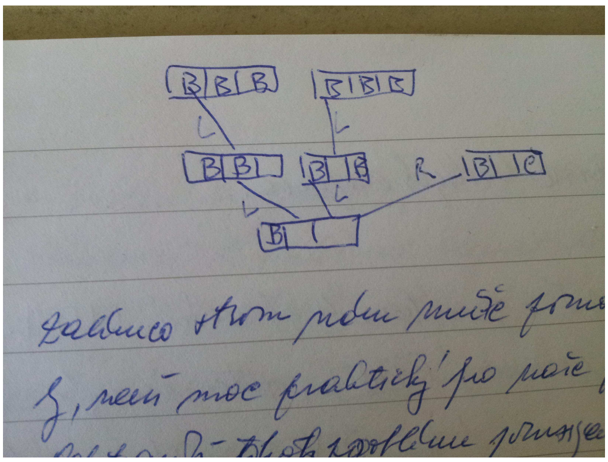
Václav Vopravil

Budeme hrát specifické hry, které nazýváme kombinatorické. Stručně takové hry jsou charakterizovány takto:

1. Hru hrají dva hráči. Tito hráči jsou tradičně označovány jako levý (bílý, modrý, L) a pravý (červený, černý, R).
2. Oba hráči mají o hře stejnou a úplnou informaci.
3. Hráči se v tazích střídají.
4. V normální variantě, hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál a jeho soupeř vyhrál.
5. Ve hře nehraje žádnou roli náhoda (nehází se kostkou, ...)
6. Pravidly hry je zaručeno, že hra skončí po konečně mnoha tazích.

Jedna z možností je nakreslení stromového grafu hry. Kořen hry je počáteční pozice a každá hrana odpovídá možnému tahu ve hře. Jedna nebo více pozic je konečná. Protože většinou levý a pravý mají různé tahy, hrany grafu označujeme L a R.

Uvažujme jednoduchou variantu hry Snort, která se hraje na proužku čtverečkovaném papíru $1 \times n$. Hráči ve svých tazích označují políčka svou barvou. Omezení tahů je takové, že sousední čtverečky nemohou být označeny různou barvou. Nechť $\boxed{}$ označuje ještě neoznačený čtvereček a $\boxed{\text{L}}$, $\boxed{\text{R}}$ označují čtverečky označené bílou (modrou, L) a černou (červenou, R) barvou. Strom hry $\boxed{\text{L}}\boxed{}\boxed{}$ ukazuje obrázek



Zatímco strom hry nám pomůže hru vizualizovat, pro praktické hraní – množiny všech pozic – není výhodný. K odstranění tohoto problému použijeme jiný zápis.

Hry budeme popisovat rekurzivně; hra bude definována pomocí množin možných tahů do nových možných pozic, tj. kam hráči mohou zahrát. Tyto nové pozice jsou opět hrami. Tedy pro hru G máme $G \equiv \left\{G^L \;\middle|\; G^R\right\}$, kde G^L je množina, kam může zahrát levý hráč a G^R je množina tahů, kam může zahrát pravý hráč. V našem příkladu máme:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{L} & & \\ \hline\end{array} \equiv \left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{L} & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{L} & & \mathrm{L} \\ \hline\end{array} \;\middle|\; \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{L} & & \mathrm{R} \\ \hline\end{array}\right\}$$

Vrátíme-li se k našemu grafu, G je uzel a G^L je množina hran grafu (kreslených nahoru doleva) a G^R je množina nových pozic pravého (kreslených nahoru doprava).

Začneme nyní vyšetřování s proužkem 4 čtverečků $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline\end{array}$. Začne-li třeba levý $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}$, potom červený má jeden možný tah $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{R} & & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}$. Jiný tah nemá. Bude-li se hrát hra z počátečního postavení $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}$, potom můžeme rekurzivně psát

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array} \equiv \left\{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{L} & & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \mathrm{L} & \mathrm{L} \\ \hline\end{array} \;\middle|\; \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{R} & & \mathrm{L} & \\ \hline\end{array}\right\}.$$

Součet her budeme definovat jako disjunktní spojení her. V každém tahu hráč na tahu si může vybrat ve které komponentě provede svůj tah a druhá (nebo ostatní) komponenta zůstane nezměněna. Hráč si vybere jednu komponentu a v ní provede svůj možný tah. Pokud hráč nemůže táhnout v žádné komponentě, potom prohrál. Rekurzivně to můžeme zapsat takto:

Nechť $G \equiv \left\{G^L \;\middle|\; G^R\right\}$ a $H \equiv \left\{H^L \;\middle|\; H^R\right\}$ jsou hry, potom dostaneme:

$$G + H \equiv \left\{(G+H)^L \;\middle|\; (G+H)^R\right\},$$

kde

$$\begin{aligned}(G+H)^L &= \{g + H;\ g \in G^L\} \cup \{G + h;\ h \in H^L\},\\ (G+H)^R &= \{g + H;\ g \in G^R\} \cup \{G + h;\ h \in H^R\}.\end{aligned}$$

Tato definice je opět rekurzivní a závisí na tom, že hra po konečně mnoha tazích skončí. V nejjednodušším případě, kdy G nebo H je 0, dostaneme $G + 0 \equiv 0$, protože stačí induktivně předpokládat $g + 0 \equiv g$ pro každou $g \in G^L$ a pro každou $g \in G^R$ a tedy

$$(G+0)^L = \{g + 0;\ g \in G^L\} \cup \{G + h;\ h \in \varnothing\} = \{g;\ g \in G^L\} = G^L$$

a analogicky

$$(G+0)^R = \{g + 0;\ g \in G^R\} \cup \{G + h;\ h \in \varnothing\} = \{g;\ g \in G^R\} = G^R.$$

tedy

$$G + 0 \equiv \left\{G^L \;\middle|\; G^R\right\} \equiv G.$$

Stručně budeme psát

$$G + H \equiv \left\{G^L + H, G + H^L \;\middle|\; G^R + H, G + H^R\right\},$$

kde $G^L + H = \{g + H;\ g \in G^L\}$ a podobně v ostatních případech.

Poznamenejme, že je možná situace, že levý zahraje v G a pravý zahraje v H. Potom levý opět může zahrát v G. Takže v jedné komponentě hráč může mít více tahů po sobě.

Zápis součtu her nám pomůže i v případě hraní her Snort na více proužcích současně. V tomto případě, hra hraná na více proužcích je přirozeným součtem jednotlivých proužků. Naopak může se stát, že po nějakém tahu se hra rozdělí na několik izolovaných proužků a součet her bude součtem těchto menších proužků. Uvažujme pozici $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\mathrm{L}}\boxed{}\boxed{}$. Tahem modrého (bílého, levého) se hra rozpadne na

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\mathrm{L}}\boxed{\mathrm{L}}\boxed{} \equiv \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\mathrm{L}} + \boxed{\mathrm{L}}\boxed{}.$$

Jednotlivým hrám budeme přiřazovat jejich hodnoty. Uděláme to tak, že zachováme vlastnosti sčítání. Tedy hodnota součtu her bude rovna součtu hodnot jednotlivých komponent. Pokud budou hodnoty reálná čísla, potom použijeme obvyklé sčítání. Pro jiné typy hodnot zavedeme nové sčítání.

Přiřazení hodnot jednotlivým hrám vyžaduje zavést ekvivalenci mezi hrami, a to sice dvě hry jsou ekvivalentní právě tehdy a jen tehdy mají-li stejnou hodnotu. Takové hry budeme označovat jako rovné $=$. Jak je obvyklé, nebudeme dělat rozdílu mezi hrou samotnou a její hodnotou, tedy pokud hry G a H mají stejnou hodnotu v, budeme také psát $G = H = v$.

Poznamenejme tedy ještě, že pokud dvě hry mají stejnou hodnotu, ještě to nutně neznamená, že jsou stejné (identické), ale znamená to, že patří do stejné rozkladové třídy.

Hry jsou rozděleny do 4 tříd podle výsledku hry. Buď ve hře vyhraje levý hráč, nebo pravý hráč, nebo začínající hráč a nebo druhý hráč. Tyto třídy se označují $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$.

K zavedení jednoduchých her využijeme [ONAG]. Nejjednodušší hrou je hra 0 (koncová hra). V této hře žádný z hráčů nechce začínat, protože okamžitě prohrává. Hráč na tahu prohraje, protože hra 0 je definována tak, že neexistuje první tah. Symbolicky $0 \equiv \{|\}$.

Ve hře $1 \equiv \{0\ |\}$ je jediný možný tah levého hráče, který může zahrát do hry 0, zatímco pravý hráč nemá povolený tah. Jiná hra je $-1 \equiv \{|\ 0\}$, ve které naopak má pravý možnost jednoho tahu. Ve hře $\{0 \mid 0\} \equiv *$ existuje vyhrávající strategie pro I. hráče.

V prázdné hře 0 žádný z hráčů nemá povolený tah (hra nula), hráč na tahu okamžitě prohrává. Označení je $\{|\}$. Takže tato hra patří do třídy $\mathcal{P}$. Poznamenejme, že tato hra je nulovým prvkem vzhledem k operaci sčítání a tedy její hodnota musí být nula. Ve hře Snort to je třeba hra $\boxed{\mathrm{R}}$ nebo $\boxed{\mathrm{L}}$ a tedy

$$\boxed{\mathrm{R}} = \boxed{\mathrm{L}} = 0.$$

Další neprázdné hry s touto hodnotou, tedy patří do třídy $\mathcal{P}$. Jsou např. $\{-1 \mid 1\}$, $\{* \mid *\}$ nebo $\boxed{\mathrm{R}}\boxed{\mathrm{R}}\boxed{}\boxed{\mathrm{L}}\boxed{\mathrm{L}}$. Zopakujme, že přestože tyto hry jsou různé, mají stejnou hodnotu.

Ve hře $\boxed{}\boxed{\mathrm{L}}$ levý hráč může zahrát do hry nula (s hodnotou 0) a zabezpečí si tak vítězství, pravý hráč nemůže zahrát a prohrál. V každém případě vyhraje levý hráč a tedy $\boxed{}\boxed{\mathrm{L}} = \{0\ |\} \in \mathcal{L}$. Tato hra má hodnotu jedna a informuje nás o tom, že levý hráč má výhodu jednoho tahu. Budeme n definovat rekurzivně jako

$$n \equiv \{n - 1\ |\} \text{ pro } n \geq 1.$$

Zatímco pravý hráč v této hře nemůže zahrát (jeho množina možných tahů je prázdná), levý hráč může zahrát do $n-1$. Všechny tahy patří do třídy $\mathcal{L}$. Uděláme-li n kopií hry $\boxed{\phantom{\text{L}}}\boxed{\text{L}}$, dostaneme právě hodnotu n a levý hráč může zahrát n způsoby.

Z druhé strany hra $\boxed{\phantom{\text{R}}}\boxed{\text{R}} = \{|\ 0\} \in \mathcal{R}$ a ze zcela identických důvodů vyhraje pravý hráč. Hra $\boxed{\phantom{\text{L}}}\boxed{\text{L}} + \boxed{\phantom{\text{R}}}\boxed{\text{R}} = \{0\ |\} + \{|\ 0\}$ patří do třídy $\mathcal{P}$, protože oba hráči mají na výběr jeden tah. To je ekvivalentní hře $\{|\}$, což znamená, že platí

$$\{0\ |\} + \{|\ 0\} = \{|\} \equiv 0.$$

Nutně tedy hra $\{|\ 0\}$ musí mít hodnotu -1. Opačné hry přirozeně definujeme jako

$$-n \equiv \{|\ -(n-1)\} \text{ pro } n \geq 1.$$

Ve hře Snort je to n kopií hry $\boxed{\phantom{\text{R}}}\boxed{\text{R}}$.

Nyní již víme, že třídy $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ a $\mathcal{P}$ nejsou prázdné. Uvažujme dále ještě hru $\boxed{\phantom{\text{L}}}$. V této hře má jediný možný tah hráč na tahu a vyhraje. Tedy

$$\boxed{\phantom{\text{L}}} \equiv \left\{\boxed{\text{L}} \,\middle|\, \boxed{\text{R}}\right\} = \{0 \mid 0\} \in \mathcal{N}$$

Protože $\boxed{\phantom{\text{L}}} \in \mathcal{N}$, její hodnota pozice musí být různá od nuly (nula patří rozkladové třídě $\mathcal{P}$. Budeme-li dále uvažovat hru

$$\boxed{\phantom{\text{L}}} + \boxed{\phantom{\text{L}}} = \{0 \mid 0\} + \{0 \mid 0\} = 0,$$

vidíme, že tato hra je sama k sobě opačnou hrou, a tedy hra nemůže mít reálnou hodnotu. Hodnotu této hra označujeme $*$ a její význam se ukáže při vyšetřování speciálních tzv. nestranných her.

Hry patřící do $\mathcal{L}$ nazýváme kladnými hrami, hry patřící do $\mathcal{R}$ nazýváme zápornými hrami, hry patřící do $\mathcal{P}$ nazýváme nulovými hrami a hry patřící do $\mathcal{N}$ nazýváme fazy hry. Fazy hry nejsou porovnatelné vzhledem k uspořádání $\geq$.

Rekurzivně můžeme definovat opačnou hru. Nechť $G \equiv \left\{G^L \,\middle|\, G^R\right\}$. Potom

$$-G \equiv \left\{-G^R \,\middle|\, -G^L\right\},$$

kde $-G^R = \{-g;\ g \in G^R\}$, $-G^L = \{-g;\ g \in G^L\}$. Pokud hra G má hodnotu v, potom $-G$ má hodnotu $-v$.

Platí $-0 \equiv 0$, protože je $-G^R = G^R = \varnothing$ a také $-G^L = G^L = \varnothing$.

Opačná hra ke hře n, $n \geq 1$ je

$$-(n) \equiv -\{n-1\ |\} \equiv \{|\ -(n-1)\} \equiv -n.$$

Z toho plyne, že naše hra $-n$ je opačná ke hře n.

Rozdíl her obvykle definujeme jako

$$G - H \equiv G + (-H).$$

Nyní je potřeba dokázat, že $G - G = 0$. Pokud $G \equiv \left\{ G^L \mid G^R \right\}$, potom

$$G - G \equiv \left\{ G^L - G, G - G^R \mid G^R - G, G - G^L \right\}.$$

Uvažme ale, že $G^R - G^R$ je možnost tahů ve hrách $G - G^R, G^R - G$ a $G^L - G^L$ je možnost tahů ve hrách $G - G^L, G^L - G$. Bez ohledu jak levý zahraje, pravý může kontrovat zcela stejným způsobem (tahem) ve druhé hře a naopak. Opakováním této úvahy si může druhý hráč vynutit vítězství a proto hra $G - G$ má hodnotu 0.

Vzhledem k naší definici (pomocí sjednocení množin), je náš systém her komutativní a asociativní a tedy tvoří Abelovu grupu.

Mezi hrami můžeme zavést částečné uspořádání $\geq$, díky přiřazeným hodnotám. Budeme říkat, že $G \geq H$, pokud jejich hodnoty mají stejnou vlastnost. Upozorněme, že ne všechny hry jsou porovnatelné (nebo jejich hodnoty). Takovým příkladem je 0 a $*$, které nejsou porovnatelné vzhledem $\geq$.

Alternativně budeme říkat

$$G \geq H \Leftrightarrow G - H \geq 0.$$

Strategicky

$$G - H \geq 0 \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}.$$

Částečné uspořádání je mj. užitečné při zjednodušování zápisu her. Uvažme například situaci $G = \{A, B \mid C\}$ kde $A < B$. Potom pro levého je lepší táhnout do B, než-li do A a platí $G = \{B \mid C\}$ (lepší tah). Z pravé strany se naopak snažíme analogicky vybrat menší hru (hru s menší hodnotou).

Uvažujme třeba hru Snort $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$. Pokud bude začínat levý, obarví asi prostřední čtvereček a výsledek bude $\boxed{}\boxed{\text{L}}\boxed{}$. Potom ale pravý hráč prohraje, protože nemůže táhnout. Bez ohledu na další tahy, levý by mohl pokračovat dvěma dalšími tahy. Pokud by levý začal $\boxed{\text{L}}\boxed{}\boxed{}$, situace se dramaticky změní. Pravý hráč dotáhne $\boxed{\text{L}}\boxed{}\boxed{\text{R}}$ a levý hráč tentokrát prohraje. Proto levý hráč si ve hře $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ vybere lepší tah, táhnout do prostředního čtverečku.

Uvažujme nyní hru $\{0 \mid 1\}$. Levý hráč může zahrát do nuly a vyhraje a pravý hráč může táhnout pouze do 1, a tedy opět levý hráč vyhraje. V každém případě levý hráč vyhraje, je tato hra kladná, $\{0 \mid 1\} \in \mathcal{L}$.

Zeptejme se, zda také vyhraje levý, pokud přidáme jeden tah pravého? Ptáme se vlastně na situaci, jak dopadne hra $\{0 \mid 1\} - 1$? Použijeme-li opět součet her a připomeneme, že $-1 \equiv \{\mid 0\}$, dostaneme

$$\{0 \mid 1\} - 1 = \{0 \mid 1\} + \{\mid 0\} = \{-1 \mid 1 - 1, \{0 \mid 1\}\} = \{-1 \mid 0, \{0 \mid 1\}\}.$$

V této hře levý hráč může zahrát pouze do hry -1, pokud začíná a prohraje. Pokud začne pravý hráč, může zahrát do nuly, kde také vyhraje. Tedy hra $\{0 \mid 1\} - 1 \in \mathcal{R}$. Znamená to, že hra $\{0 \mid 1\}$ není -1, ale je menší než 1. Zjednodušíme hru $\{-1 \mid 0, \{0 \mid 1\}\} = \{-1 \mid 0\}$, tedy $\{0 \mid 1\} > 0$. Ale podle naší definice opačné hry $-\{0 \mid 1\} \equiv \{-1 \mid 0\}$, takže jsem našli

$$\{0 \mid 1\} - 1 = -\{0 \mid 1\},$$

nebo-li

$$\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 1.$$

Odtud získáme, že hra

$$\{0 \mid 1\} \equiv \frac{1}{2}.$$

Pokud budeme tento argument opakovat, najdeme také $\frac{1}{4} = \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right\}$ a $\frac{1}{8} \equiv \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{4}\right\}$. Obecněji:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \equiv \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^n}\right\}.$$

Nyní umíme sčítat hry s hodnotami zlomků se jmenovatelem mocniny dvou a to jednoduchým způsobem. Například, budeme-li chtít vyjádřit $\frac{5}{8}$, najdeme rozklad $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, dostaneme

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \{0 \mid 1\} + \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{4}\right\} = \left\{0 + \frac{1}{8}, 0 + \frac{1}{2} \,\middle|\, 1 + \frac{1}{8}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Protože $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ a $\frac{3}{4} < \frac{9}{8}$, platí $\frac{5}{8} \equiv \left\{\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{3}{4}\right\}$. Stejným způsobem odvodíme i formuli

$$\frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{p}{2^n} \,\middle|\, \frac{p+1}{2^n}\right\}.$$

Vraťme se ještě ke hře $*$. Induktivně lze dokázat, že hra $*$ je větší než libovolné záporné číslo. Uvažme třeba

$$* - (-1) = * + 1 = \{0 \mid 0\} + \{0 \mid\} = \{1, * \mid 1\}.$$

Pravý hráč může zahrát do 1 a levý hráč může zahrát také do 1. Oba tahy zaručí levému výhru a tedy $* + 1 \in \mathcal{L}$. Nyní induktivně předpokládáme, že také $* + \frac{1}{2^{n-1}} \in \mathcal{L}$. Potom

$$* + \frac{1}{2^n} = \{0 \mid 0\} + \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}, * \,\middle|\, \frac{1}{2^{n-1}} + *, \frac{1}{2^n}\right\}.$$

Levý hráč může zahrát do kladné hry a pravý může zahrát pouze do kladné hry. Tedy $* + \frac{1}{2^n} \in \mathcal{L}$ pro $n \geq 0$.

Analogicky je možné se přesvědčit, že $*$ je menší než libovolné kladné číslo. Hra $*$ se jeví jako infinitezimální.

Uvažujme ještě hru $\{0 \mid *\}$. Tuto hru nazýváme up a označujeme ji šipkou $\uparrow$. Jistě platí $\uparrow \in \mathcal{L}$: levý může zahrát do koncové hry 0, pravý do hry $*$, kde levý dotáhne a vyhraje.

Ukažme indukcí, že hra $\{0 \mid *\} \equiv \uparrow$ je menší než libovolné kladné číslo.

$$\uparrow - 1 = \{0 \mid *\} + \{\mid 0\} = \{-1 \mid * - 1, \uparrow\}.$$

Levý může zahrát do -1 a prohraje. Pravý může táhnout do $* - 1$, kde vyhraje. Proto $\uparrow - 1 \in \mathcal{R}$. Nyní indukcí předpokládejme, že $\uparrow - \frac{1}{2^{n-1}} \in \mathcal{R}$. Potom dostaneme

$$\uparrow - \frac{1}{2^n} = \{0 \mid *\} + \left\{-\frac{1}{2^{n-1}} \,\middle|\, 0\right\} = \left\{-\frac{1}{2^n}, \uparrow - \frac{1}{2^{n-1}} \,\middle|\, * - \frac{1}{2^n}, \uparrow\right\}.$$

Levý opět může zahrát pouze tak, aby prohrál (viz indukční hypotéza) a pravý si může vybrat dobrý tah do $* - \frac{1}{2^n}$. Proto $\uparrow - \frac{1}{2^n} \in \mathcal{R}$, pro $n \geq 0$.

Opačná hra $-\uparrow \equiv \downarrow$ je naopak záporná a větší než libovolné záporné číslo.

Uvažujme ještě pozici ve hře Snort $\boxed{\ }\boxed{\ }$. Levý hráč může táhnout do $\boxed{\mathrm{L}}\boxed{\ }$ nebo $\boxed{\ }\boxed{\mathrm{L}}$. Obě dvě pozice mají hodnotu 1. Začne-li naopak pravý hráč, zahraje analogicky do $\boxed{\mathrm{R}}\boxed{\ }$ nebo $\boxed{\ }\boxed{\mathrm{R}}$. Obě pozice mají hodnotu -1. Dostáváme tedy, že hodnota $\boxed{\ }\boxed{\ } = \{1 \mid -1\}$. Tato hra se označuje ± 1. Hra $\pm 1 \in \mathcal{N}$, ale není rovna $*$. Jinou hrou v $\mathcal{N}$ je hra $\pm 1 + 1 = \{1 \mid -1\} + \{0 \mid\} = \{2, \pm 1 \mid 0\}$ a konečně hra $\pm n \equiv \{n \mid -n\}$. Ve všech těchto hrách existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Ve hře Snort to je pozice s hodnotou $\boxed{\ }\boxed{\ } = \pm 2$.

Hra Snort se hraje na neorientovaném grafu, každý uzel je neobarven, nebo obarvený černě, popř. bíle. Levý na tahu si vybere dosud neobarvený uzel, který nesousedí s bílým uzlem a obarví ho černě. Pravý symetricky si vybere neobarvený uzel, který nesouvisí s černým uzlem a obarví ho bíle. Hra Col je varianrou hry Snort. Obě hry se hrají na grafu ve kterém jsou obarveny bíle nebo černě uzly a nebo jsou neobarveny. Ve hře Col levý hráč si vybere dosud neobarvený uzel, který nesouvisí s černým uzlem a obarví ho černě. Pravý hráč si vybere neobarvený uzel, který nesouvisí s uzlem obarveným bíle a obarví ho bíle. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál.

Doporučená literatura

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[CGT] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)

[2hs03RMF actual snort.tex, 01/03/14, 10:28]