1 Úlohy

Úloha 1.1. Převeďte číslo 198_{10} do dvojkové soustavy.

Úloha 1.2. Nalezněte hodnoty následujících her:

1. $\{1, 2, 3 \mid 4, 5\}$
2. $\{5, 9 \mid 10, 15, 20\}$
3. $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots \;\middle|\; 2\right\} = \left\{\frac{2^n-1}{2^n} \;\middle|\; 2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Úloha 1.3. Nalezněte hodnotu her $\{\uparrow \mid 2\}$, $\{\uparrow \mid 0\}$, $\{0, \uparrow \mid 1\}$.

Úloha 1.4. Nalezněte hodnotu $\left\{\frac{1}{2} + \uparrow \;\middle|\; 1\right\}$.

Úloha 1.5. Použijte Simplicity Rule (větu o nejstarším prvku) a nalezněte hodnoty her

1. $\left\{\frac{1}{2} \;\middle|\; 3\frac{1}{2}\right\}$
2. $\left\{-2, -1 \;\middle|\; -\frac{1}{4}\right\}$
3. $\left\{0 \;\middle|\; \frac{3}{4}, 3\right\}$
4. $\left\{-1, 0, 1 \;\middle|\; 2, 2\frac{1}{2}\right\}$

Úloha 1.6. Najděte hodnotu hry Lyžaři:

L				
		R		
				L

Úloha 1.7. Počáteční konfigurace normální hry G a H jsou:

$$G \equiv \{0 \mid 0, *, \{\mid 0\}\}, \qquad H \equiv \{\mid 0, \{\mid 0\}, \{0 \mid\}\}.$$

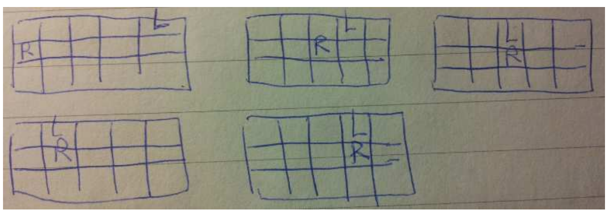
Nalezněte hodnoty her:

1. $H - G$
2. $0 - H$
3. $* + H$.

Úloha 1.8. Podrobně vysvětlete $\{-2 \mid 3\} = 0$, $\left\{\frac{1}{2} \;\middle|\; 2\right\} = 1$.

Úloha 1.9. Najděte hodnotu hry Snort v pozici:

Úloha 1.10. Hraje se hra Lyžaři. Najděte hodnoty her:



.

Úloha 1.11. Podrobně vyšetřete:

1. $\{-2 \mid 3\} = 0$
2. $\left\{\frac{1}{2} \mid 2\right\} = 1$
3. $\uparrow > 0$
4. $\uparrow \parallel *$
5. $* + * = 0$
6. porovnejte $\{1 \mid -1\}$ s $1, -1$ a 0.
7. $\bullet 2 \mathrel{?} \uparrow$
8. $2* \mathrel{?} \boldsymbol{+}_1$

Úloha 1.12. Je-li $n \in \mathbb{Q}, n > 1$, potom $\{0 \mid n\} = 1$.

Úloha 1.13. Nalezněte výsledek hry $\uparrow + *$ (tj. zda je < 0, > 0, fazy nebo nulová).

Úloha 1.14. Pro hru $G = \{0 \mid \downarrow + *\}$ nalezněte vztah s nulou.

Úloha 1.15. Zjednodušte hry (nalezněte jejich hodnoty):

$$\left\{3 \mid 5\tfrac{1}{2}\right\} \qquad \left\{-1 \mid -\tfrac{1}{4}\right\} \qquad \left\{0 \mid \tfrac{3}{4}\right\} \qquad \left\{1 \mid 3\tfrac{1}{2}\right\}.$$

Úloha 1.16. Jaké nadreálné číslo reprezentuje:

1. $\left\{2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}, \ldots \mid 3\right\}$
2. $\{\mid -3\}$
3. $\{-3 \mid -2\}$.

Úloha 1.17. Ukažte, že $x \equiv \left\{\frac{1}{16} \mid \frac{3}{4}\right\}$ není rovno aritmetickému průměru $\frac{1}{16}$ a $\frac{3}{4}$. Nalezněte vyhrávající strategii v rozdílu $x - y$ je-li $y \equiv \left\{\frac{1}{4} \mid \frac{3}{8}\right\} = \frac{5}{16}$.

Úloha 1.18. Je-li $m, n > 0$, dokažte $\{-m \mid n\} = 0$.

Úloha 1.19. Dokažte $\{0 \mid 3\} + \{\mid 0\} = 0$.

Úloha 1.20. Ukažte, že pro záporné číslo x je $\boldsymbol{+}_x = \{0 \mid \{0 \mid -x\}\}$ je číslo.

Úloha 1.21. Připomeňme, že $\boldsymbol{+}_G \equiv \{0 \mid \{0 \mid -G\}\}$. Dokažte:

1. $(\forall G) \quad 0 < \boldsymbol{+}_G < \frac{1}{2}$.
2. Nalezněte G tak, aby $\boldsymbol{+}_G = \frac{1}{2}$.
3. Je-li G kladné číslo, potom $\boldsymbol{+}_G < \uparrow$.
4. Je-li G záporné číslo, potom $\boldsymbol{+}_G > 0$.

Úloha 1.22. Porovnejte následující čísla:

1. $\{\mid -1\}$, $\{\mid -1, 0\}$
2. $\{\mid 0, 1\}$, $\{-1 \mid 0\}$
3. $\{0, 1 \mid 2\}$ a $\left\{-1, 0, 1 \mid 1\frac{1}{2}, 2\right\}$.

Úloha 1.23. Nechť $G = \{0 \mid -\uparrow + *\}$. Porovnejte tuto hru s nulou.

Úloha 1.24. Sečtěte $5 + *$.

Úloha 1.25. Porovnejte hry $G \equiv \{0 \mid \uparrow\}$ a $H \equiv \uparrow *$.

Úloha 1.26. Nechť x, y jsou čísla. Dokažte rovnost $\{x \mid y\} + * = \{x* \mid y*\}$ pro $x \geq y$ a pro $x > y$ platí $\{x* \mid y\} = \{x \mid y*\} + *$.

Úloha 1.27. Dokažte, že hry $\{1 \mid 4\}$ a 3 nejsou ekvivalentní!

Úloha 1.28. Hra $\{1 \mid -1\}$ je fazy s $0, 1, -1, \frac{1}{2}, \ldots$. Dokažte!

Úloha 1.29. Ukažte přímo, že $\downarrow \parallel *$.

Úloha 1.30. Ukažte přímo, že $\downarrow + \downarrow < *$

Úloha 1.31. Uvažujme hry, která nejsou čísla, G a H a následující tvrzení:

$$\text{Je-li } G > 0 \text{ a } H < 0, \text{ potom } G \parallel H.$$

Pokud je tvrzení pravdivé, tvrzení dokažte. Jinak nalezněte protipříklad.

Úloha 1.32. Zahrajte si Chomp! na $n = 4000 = 2^5 \cdot 5^3$ nebo pro $n = 10^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20}$.

Úloha 1.33. Je dána posloupnost $\uparrow + \uparrow, \uparrow + \uparrow + *, \uparrow + \uparrow + \uparrow, \uparrow + \uparrow + \uparrow + *, \ldots$ Nalezněte nejjednodušší tvar této posloupnosti.

Úloha 1.34. Dokažte, že každé dyadické racionální číslo má konečný den narození.

Úloha 1.35. Pro libovolné dyadické číslo nalezněte den narození.

Úloha 1.36. Sečtěte:

1. $\left\{1\frac{1}{4} \mid 2\right\} + \left\{-1\frac{3}{4} \mid -1\frac{1}{2}\right\}$
2. $\{1 \mid 2\} + \left\{-2 \mid -1\frac{1}{4}\right\}$
3. $\left\{\frac{1}{2} \mid 2\right\} + \left\{-\frac{1}{2} \mid 0\right\}$
4. $\left\{2\frac{1}{2} \mid 4\frac{1}{2}\right\} + \{-3 \mid -1\}$.

Úloha 1.37. Dokažte, že nadreálná čísla nejsou Archimédovská.

Úloha 1.38. Dokažte, nebo vyvraťte, že nadreálná čísla jsou hustá.

Úloha 1.39. Připomeneme, že hra $* \equiv \{0 \mid 0\}$ není číslo. Tato hra je ≤ 0, ≥ 0, ale fazy s nulou. Uvažme ještě hru $\uparrow \equiv \{0 \mid *\}$, která opět není číslo (obsahuje nečíslo $*$, a nemůže být zjednodušena).

1. Ukažte, že $\uparrow$ je kladná,
2. ukažte, že hra $\uparrow \parallel *$,
3. ukažte, že hra $* + * = 0$.

Úloha 1.40. Na tabuli jsou napsaná čísla $2, 3, \ldots, 9$. Dva hráči se v tazích střídají, v každém tahu smažou nějaké číslo, včetně jeho násobků (jsou-li takové). Hráč, který nemůže smazat číslo, prohrál. Určete, který z hráčů má vyhrávající strategii a tuto strategii popište.

Úloha 1.41. Uvažujme hru $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$, o které víme, že $G^L \ngeq 0$ a $G^R \nleq 0$. Nalezněte strategicky výsledek hry, tj. do jaké výsledkové třídy hra patří.

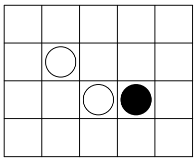
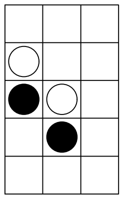
Úloha 1.42. Definujme dvě hry $G \equiv \{*, \uparrow \mid \downarrow*, 0\}$ a $H \equiv \{\Uparrow* \mid \downarrow*\}$. Dokažte:

1. $G + G = *$
2. $H + H = \uparrow$.

Úloha 1.43. Podrobně dokažte $1 \parallel 1*$ a $\{1 \mid *\} > \{1 \mid 0, *\}$, třeba pomocí rozdílu her a strategicky.

Úloha 1.44. Dokažte: Je-li hra fazy s nulou, potom není číslo.

Úloha 1.45. Zahrajte si hru Konane v těchto pozicích:

$G =$   $= H.$

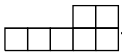
Zahrajte si také součtovou hru $G + H$.

Úloha 1.46. Dokažte pro každé nezáporné celé číslo n platí

$$-\tfrac{1}{2^n} < * < \tfrac{1}{2^n}.$$

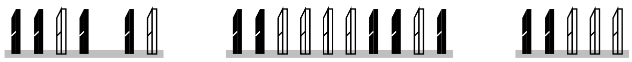
Úloha 1.47. Ve hře Hex na „šachovnicích“ (2×1), (3×2), resp. (4×3) má II. hráč vyhrávající strategii? Pokud ano, popište ji! Pokud ne, popište vyhrávající strategii I. hráče.

Úloha 1.48. Nalezněte hodnotu hry Domino

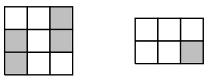
.

Úloha 1.49. K jaké výsledkové třídě patří hry:

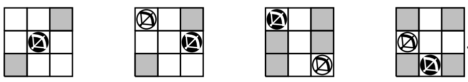
1. Padající domino



2. Domino

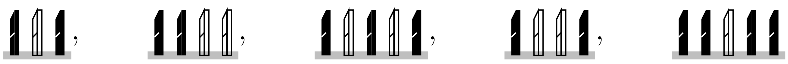


3. Amazonky

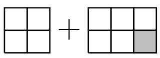
.

Úloha 1.50. Nalezněte hodnoty následujících her:

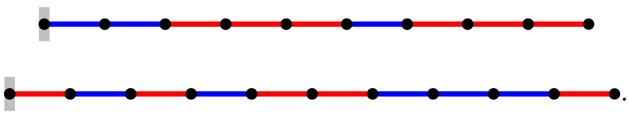
1. Padající domino



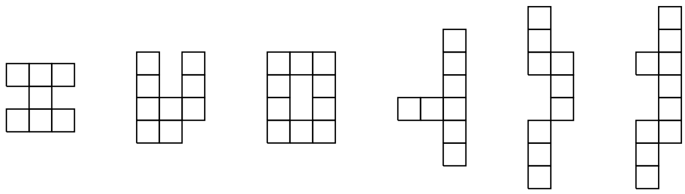
2. Domino



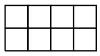
3. Hackenbush podle Berlekampa nebo metodou van Rodes:

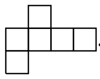


Úloha 1.51. Nalezněte hodnotu her Domino :

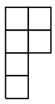
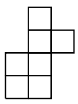


Úloha 1.52. Nalezněte kanonický tvar her:

1. $\uparrow + \uparrow$
2. $1 + *$
3. hra Domino 
4. $\downarrow + \bullet 2$.

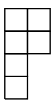
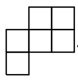
Úloha 1.53. Najděte hodnotu hry Domino v pozici .

Úloha 1.54. Ověřte, že ve hře Domino mají následující konfigurace danou hodnotu:

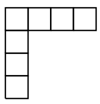
 $= \{2 \mid 0\}$  $= \{1* \mid -1*\}$.

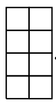
uloha

Úloha 1.55. Uvažujme dvě hry Domino G, H:

 $= G$ a $H =$ .

Ukažte, že $G = \left\{2, \{1 \mid -1\}, * \mid 0, \frac{1}{2}\right\}$ a $H = \left\{2, \{1 \mid -1\} \mid 0, *, -\frac{1}{2}\right\}$. Potom ukažte, že hry lze zapsat jednodušeji jako $G = \{2 \mid 0\}$ a $H = \left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\}$. Ukažte, že levý hráč preferuje G než hru H. uloha

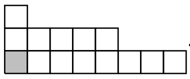
Úloha 1.56. Ukažte, že hra Domino  má hodnotu $*$. uloha

Úloha 1.57. Uvažujme hru $\left\{0, \{2 \mid 0\} \mid \{0 \mid -2\}, \left\{\frac{1}{2} \mid -2\right\}\right\}$ a hru Domino .

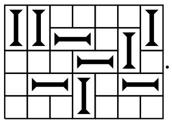
1. Ukažte, že $\{2 \mid 0\}$ je reverzibilní prvek.
2. Ukažte, že $\left\{\frac{1}{2} \mid -2\right\}$ je dominující prvek.
3. Využijte tyto informace k určení hodnoty hry Domino.

uloha

Úloha 1.58. Nalezněte optimální strategii ve hře CHOMP! v postavení



Úloha 1.59. Hra CRAM je v postavení



1. Jak zahrajete?
2. Tato hra je ekvivalentní s hrou NIM na třech hromádkách. Nalezněte je!
3. Jaké jsou hodnoty izolovaných částí?
4. Je daná pozice $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$? Vysvětlete!

Úloha 1.60. Hra CRAM:

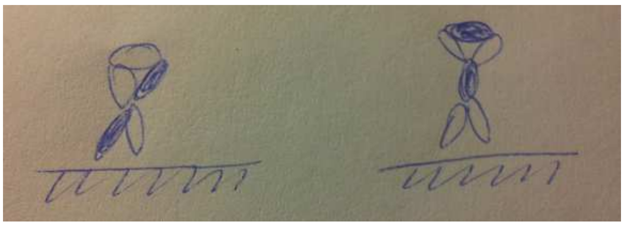
1. Nalezněte velikost hromádky NIM, odpovídající hře CRAM, která se hraje na šachovnici 2×3.
2. Nalezněte všechny vyhrávající tahy, pokud existují, na součtu šachovnic 2×3 a 1×4.

Úloha 1.61. Zahrajte si hru CRAM na pásku čtvercového papíru (1×21).

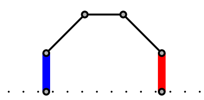
Úloha 1.62. Hra DOUBLE HACKENBUSH: Hraje se jako obvyklý HACKENBUSH až na to, že v každém tahu hráč smaže dvě tyčinky své barvy. Nalezněte v této hře hru, která není nadreálné číslo.

Úloha 1.63. Nakreslete dva grafy hry HACKENBUSH s hodnotou $1\frac{1}{4}$.

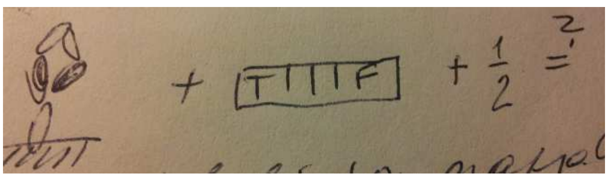
Úloha 1.64. Nalezněte hodnoty hry HACKENBUSH následujících dvou her:



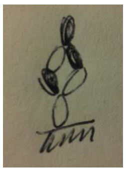
Úloha 1.65. Označte neoznačené tyčinky ve hře HACKENBUSH tak, aby hry měla hodnotu $\frac{1}{2}$.



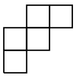
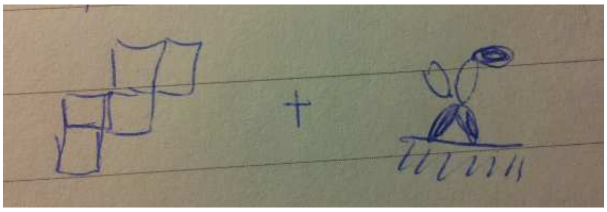
Úloha 1.66. Nalezněte součet hry HACKENBUSH, ŽÁBY a nadreálného čísla:



Úloha 1.67. Nalezněte hodnotu hry Hackenbush:

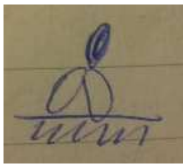
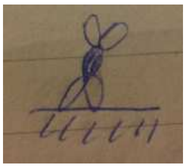


Úloha 1.68. Zahrajte si součtovou hru (Domino a Hackenbush):

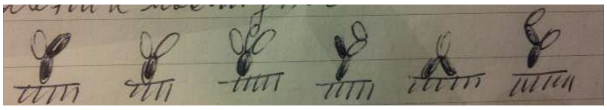
 + .

Úloha 1.69. Pomocí součtu her ověřte podrobně, že hra Černobílý Nim ⊧●○ má hodnotu $\frac{3}{4}$. Třeba tak, že strategicky dokážete ⊧●○ $+ \frac{1}{4} - 1 = 0$.

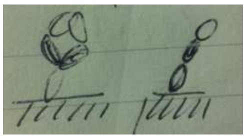
Úloha 1.70. Nakreslete graf hry Hackenbush s hodnotou $2\frac{3}{4}$.

Úloha 1.71. Zahrajte si hru Hackenbush a ukažte, že hra  má hodnotu 1 a zjistěte hodnotu hry .

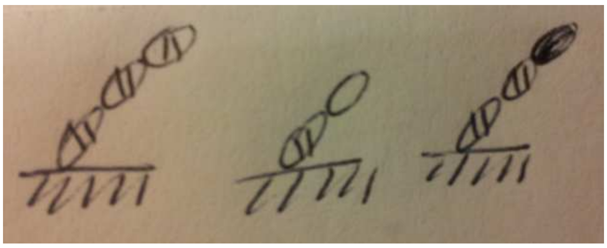
Úloha 1.72. Nalezněte hodnoty Hackenbush

.

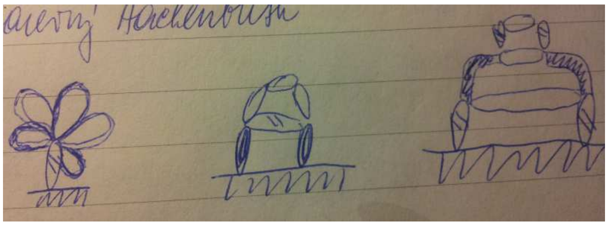
Úloha 1.73. Řešte předcházející úlohu pro Dětský Hackenbush.

Úloha 1.74. Nalezněte hodnoty her Hackenbush .

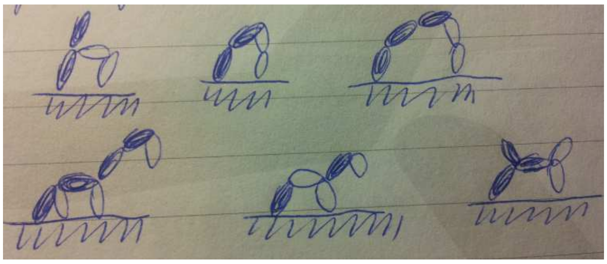
Úloha 1.75. Jaké mají hodnoty hry Trikolor Hackenbush



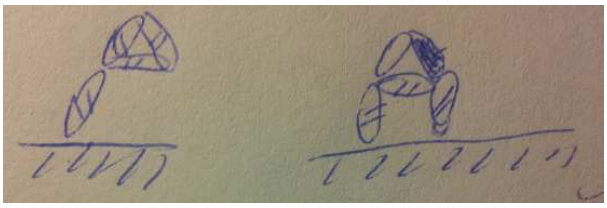
Úloha 1.76. Určete hodnoty hry Trikolor Hackenbush

.

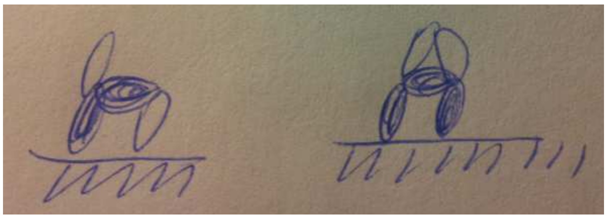
Úloha 1.77. Dětský Hackenbush. Hráči postupně odebírají tyčinky své barvy, při tahu nesmí žádná spadnout na zem. Hru hrajte v pozicích:

.

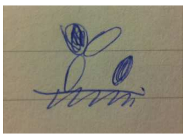
Úloha 1.78. Najděte hodnotu hry RGB Hackenbush těchto pozic:

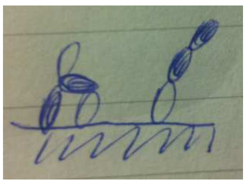
.

Úloha 1.79. Nalezněte hodnotu Dětského Hackenbushe v pozicích:

.

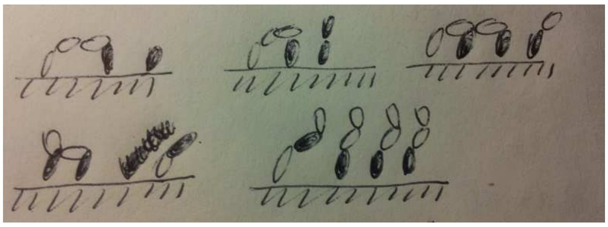
Úloha 1.80. Přiřaďte následující pozici ve hře Hackenbush číselnou hodnotu:

.

Úloha 1.81. Ve hře Hackenbush nalezněte součet .

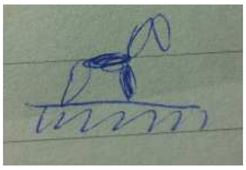
Úloha 1.82. Nalezněte hodnotu hry HACKENBUSH 

Úloha 1.83. Nalezněte hodnoty hry HACKENBUSH v pozicích:

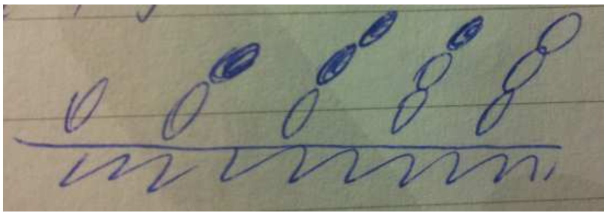
.

Úloha 1.84. Nakreslete graf hry HACKENBUSH s hodnotou $\frac{31}{64}$.

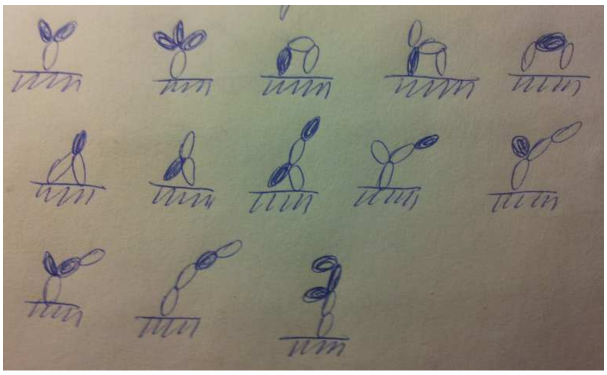
Úloha 1.85. Nalezněte hodnotu koně ve hře HACKENBUSH

.

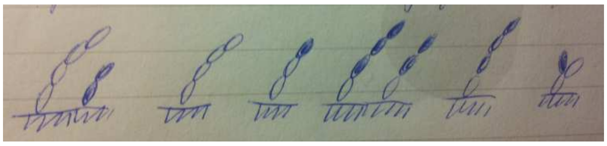
Úloha 1.86. Nejlepší tah levého a nejlepší tah pravého hráče demonstrujte na příkladu hry HACKENBUSH na těchto obrázcích:

.

Úloha 1.87. Nalezněte hodnoty her HACKENBUSH

.

Úloha 1.88. Zapište jako sendvič $\{b \mid r\} = v$ následující pozice ve hře HACKENBUSH:

.

Úloha 1.89. Porovnejte hry $\{1 \mid -1\}$ a $\{2 \mid *\}$.

Úloha 1.90. Pro hru $\{2, 3, -2, 3* \mid 0, \{0, * \mid *\}, *\}$ nalezněte její kanonický tvar.

Úloha 1.91. Užitím odebírání dominujících a reverzibilních prvků nalezněte kanonický tvar her. Při výpočtech nepoužívejte větu o nejstarším prvku (Simplicity Rule)!

1. $\{2, 3 \mid 4, 5\}$
2. $\{\uparrow, +_7 \mid 0\}$
3. $\{\{4 \mid 2\} \mid \{3 \mid 1\}\}$
4. $\left\{0, *, \bullet 2, -\frac{1}{8} \mid 0, *, \bullet 3\right\}$
5. $\{\uparrow, * \mid \uparrow *, 0\}$
6. $\{\{4 \mid 2\}, \{3 \mid 1\} \mid 0\}$.

Úloha 1.92. Nalezněte kanonický tvar $\{\{\{* \mid 0\} \mid 0\} \mid \{\{* \mid 0\} \mid *\}\}$.

Úloha 1.93. Nalezněte den narození her: 0, 3, $\frac{17}{32}$, $2\frac{1}{2}$, $\{5, 6 \mid 9\}$, $\left\{\frac{1}{8} \mid \frac{21}{32}\right\}$.

Úloha 1.94. Ukažte, že hru $\{\uparrow, * \mid 0, \uparrow\}$ lze zredukovat na hru $\{0, * \mid 0\}$.

Úloha 1.95. Nalezněte hromádku hry Nim ekvivalentní součtu $\bullet 2 + \bullet 6 + \bullet 5$.

Úloha 1.96. Hra Split Nim. Hraje se jako hra hra Nim, nebo hráč může rozdělit hromádku na dvě (ne nutně stejné) hromádky. Například, jsou-li na hromádce 4 kameny, může se odebrat $1, 2, 3$ nebo 4 kameny, nebo rozdělit hromádku na dvě $1, 3$ a $2, 2$.

1. Nalezněte nim hodnotu jednohromádkových her s $1, 2, 3$ nebo 4 kameny.
2. Nalezněte všechny vyhrávající tahy, pokud existují, pokud se hraje na třech hromádkách s $1, 2$ a 3 kameny.
3. Nalezněte všechny vyhrávající tahy, pokud existují, pokud se hraje na třech hromádkách s $1, 2$ a 4 kameny.
4. Co se stane, pokud budeme hrát na dvou stejných hromádkách?

Úloha 1.97. Hraje se hra podobná Nimu. Dva hráči se střídají v tazích. Na počátku hry jsou dány 4 hromádky s $3, 4, 5$ a 6 kamenech. Tah se skládá buď

1. odeberou 1 kámen tak, aby zanechali na hromádce nejméně dva kameny,
2. nebo odeberou celou hromádku, má-li 2 nebo 3 kameny.

Hráč, který zahraje jako poslední, prohrál. Který z hráčů vyhraje? Jakou bude mít strategii?

Úloha 1.98. Máme tuto variantu hry Nim. Na počátku hry jsou dány dvě hromádky s m a n kameny na každé z nich. Tah se skládá z odebrání jedné hromádky a druhou rozdělit na dvě neprázdné hromádky. Pozice $(1, 1)$ je koncová. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice. Nápověda: Spočítejte $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ pozice pro malé hodnoty m, n, a potom odhadněte pravidlo.

Úloha 1.99. Hraje se jako hra Nim. V prvním tahu není možné odebrat celou hromádku. Potom, pokud hráč odebral x kamenů, následující hráč může odebrat nejvíce $\lfloor \frac{3x}{2} \rfloor$ kamenů. Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice.

Úloha 1.100. Hraje se hra Laskerův Nim. Je dána hromádka kamenů. Dva hráči se střídají v tazích, v každém tahu si hráč vybere hromádku a odebere (jako v obvyklé hře Nim) libovolný počet kamenů z této hromádky, nebo rozdělí na dvě (ne nutně stejné).

1. Nalezněte Grundyovy hodnoty pro hromádky s nejvíce 13 kameny.
2. Uměli byste podat obecnou formuli Grundyovy funkce?
3. Jak se bude hrát hra s $2, 5$ a 7 kameny?

Úloha 1.101. Zahrajte si hru Nim v pozici Nim$[9, 10, 11, 12]$.

Úloha 1.102. Budeme hrát hru Nim (v normální variantě). Hra skončila v postavení Nim$[26, 19, 10, 9, 7]$. Má první hráč vyhrávající strategii? Pokud ano, jaký je maximální počet kamenů, které je třeba odebrat? (Odpověď: Čtyři kameny ze čtvrté hromádky.)

Úloha 1.103. Varianta hry Nim se skládá ze 4 hromádek se $17, 5, 12$ a 11 kameny. Jak druhý hráč odpoví, pokud první hráč odebral z první hromádky v prvním tahu 9 kamenů?

Úloha 1.104. Podrobně vyšetřete následující pozice ve hře Nim: Nim$[10; 1, 3]$, Nim$[10; 1, 2, 3]$ a Nim$[10; 1, 3, 4]$.

Úloha 1.105. Ukažte, že v každé pozici hry Nim je množina vyhrávajících tahů prázdná, nebo obsahuje lichý počet tahů.

Úloha 1.106. Zahrajte si hru Nim$[3, 4, 5]$.

Úloha 1.107. Nalezněte nim součet $\bullet 3 + \bullet 4 + \bullet 5 + \bullet 6 + \bullet 7$.

Úloha 1.108. Dokažte indukcí, že ve hře Nim$[1, 3, 4]$ jsou $\mathcal{P}$ pozice $0, 2 \pmod 7$.

Úloha 1.109. Nalezněte nim číslo $\bullet n$ takové, aby $\bullet 7 + \bullet n + \bullet 4 = 0$.

Úloha 1.110. Nalezněte $\bullet n$ tak, aby ve hře $\bullet 32 + \bullet n + \bullet 5 + \bullet 17$ vyhrál druhý hráč.

Úloha 1.111. Nalezněte $\bullet n$ tak, aby ve hře $\bullet n + \bullet 21 + \bullet 5 + \bullet 17$ vyhrál druhý hráč.

Úloha 1.112. Nalezněte nim hromádku ekvivalentní s $\bullet 2 + \bullet 6 + \bullet 5$.

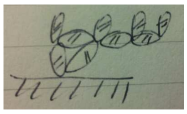
Úloha 1.113. Jak odpovíte ve hře Nim$[25, 13, 23, 3]$, pokud první tah bylo odebrání 9 kamenů ze třetí hromádky?

Úloha 1.114. Použijte definici součtu a najděte hodnoty her:

1. $\bullet 1 + \bullet 3 + \bullet 5$
2. $\bullet 3 + \bullet 5 + \bullet 7$
3. $\bullet 2 + \bullet 5 + \bullet 7$
4. $\bullet 1 + \bullet 3 + \bullet 9 + \bullet 27$.

Úloha 1.115. Hru Fibonacciův Nim budeme hrát také se 24 kameny. První hráč v prvním tahu odebere libovolný počet kamenů, ale ne všechny. Potom se hráči střídají v tazích, v každém tahu odebírají nejvýše dvojnásobek jak jeho soupeř v předcházejícím tahu. Který z hráčů má výhodu? Popište tuto vyhrávající strategii. Jako obvykle prohraje hráč, který udělal poslední tah.

Úloha 1.116. Wythoffův Nim. Zahrajte si hru z počáteční pozice $(14, 15)$.

Úloha 1.117. Ve hře Zelený Hackenbush nalezněte hodnotu grafu: .

Úloha 1.118. Dokažte, že v substrakční hře $S = \{1, 2, 3, 4\}$ jsou $\mathcal{P}$ pozice násobky pěti.

Úloha 1.119. Zahrajme si substrakční hry s $S_1 = \{1, 3, 5\}$ a $S_2 = \{1, 3, 6\}$.

1. Předpokládejte, že jsou dány dvě hromádky a nalezněte pravidlo pro každou hromádku. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ pozice pro dvouhromádkouvou variantu.
2. Zahrajte si opět dvouhromádkovou variantu, na jedné je možné odebírat z množiny S_1 a z druhé z množiny S_2.

Úloha 1.120. Uvažujme substrakční hru, kde $n = 13$ a substrakční množina je $\{1, 2, 4\}$.

1. Nakreslete strom hry.
2. Označte pozice $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$.
3. Který z hráčů vyhraje a proč?

Úloha 1.121. Zahrajte si hru s odčítáním, je-li dáno $n = 24$ a S je množina

1. $S = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $S = \{1, 2, 7\}$.

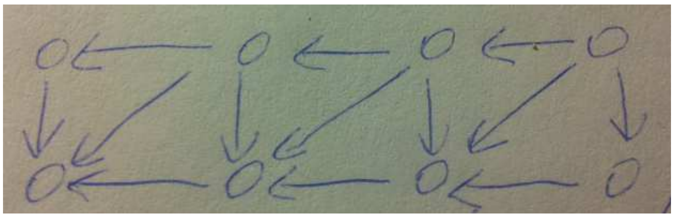
Úloha 1.122. Hraje se hra s odčítáním, $S = \{2, 5, 6\}$, na třech hromádkách se $7, 8$ a 9 kameny. Kdo ve hře vyhraje a jak bude hrát?

Úloha 1.123. Najděte periodu hry s odčítáním, kde $S = \{2, 4, 7, 8\}$.

Úloha 1.124. Nalezněte Grundyovu posloupnost hry s odečítáním, v postavení $n = 5$ a $S = \{1, 2, 4\}$.

Úloha 1.125. Najděte Grundyovy hodnoty na šachovnici $(1 \times n)$ nestranné hry Cram.

Úloha 1.126. Na následujícím grafu nalezněte Grundyovy hodnoty:



Úloha 1.127. Na stole je hromádka kamenů, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu musí hráč odebrat vlastního dělitele počtu kamenů, nebo 1 kámen. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci.

Úloha 1.128. Dva hráči hrají hru na schodišti s 2016 schody. Na začátku hry je na stupních schodiště rozmístněno konečně mnoho mincí. (Nemusí být na každém schodu, ale může jich tam být i víc.) V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolné množství mincí (nejméně jednu, nejvíce všechny) o schod níže. S mincemi, které se přesunou z prvního schodu na podlahu podesty se již nehraje. Hráči se v tazích střídají, kdo nemůže táhnout, prohrál. Nalezněte všechny $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice. Své tvrzení dokažte!

Úloha 1.129. Hraje se hra KAYLES K_n.

1. Nalezněte rekurzivní formuli Grundyovy funkce $\mathcal{G}(K_n)$.
2. Vypočítejte $\mathcal{G}(K_8)$
3. Potvrďte, nebo vyvraťte, tvrzení: Je-li $n > 0$, vyhraje v K_n první hráč.

Úloha 1.130. Dva hráči hrají hru s odečítáním, $S = \{2, 7, 8\}$, na dvou hromádkách s 11 a 13 kameny. Jaký je první vyhrávající tah? Najděte Grundyovu posloupnost. Jaká je perioda této posloupnosti?

Úloha 1.131. Uvažujme hru s odečítáním, $S = \{2, 3, 5\}$. Nalezněte Grundyovu posloupnost a ukažte, že její perioda je 7.

Úloha 1.132. Uvažujme hru s odečítáním, $S = \{3, 6, 7\}$. Nalezněte Grundyovu posloupnost a ukažte, že její perioda je 10.

Úloha 1.133. Nalezněte Grundyovu hodnotu $\mathcal{G}(5)$ hry s odečítáním $S = \{1, 2, 4\}$,

Úloha 1.134. Najděte nim součet $12 \oplus 21$ a $15 \oplus 10 \oplus 5$.

Úloha 1.135. Dokažte pro přirozená čísla $x \oplus y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Úloha 1.136. Na začátku hry je v rovině rozmístněno konečně mnoho teček. Některé z nich mohou být pospojovány neprotínajícími uzavřenými křivkami. Tah se skládá z nakreslení uzavřené křivky, procházející minimálně jednou tečkou a neprotínající (ani nedotýkající) jiné křivky, ani sama sebe. Každou tečkou může procházet nejvýše jedna křivka. Hráči se v tazích střídají, kdo nemůže táhnout prohrál. Které pozice jsou $\mathcal{P}$?

Úloha 1.137. Nalezněte hodnotu následující hry ROPUCHY A SKOKANI. Levý hráč začíná, jaký je jeho nejlepší tah? (Levý hráč hraje v pravo s T, pravý hráč hraje doleva s F.)

T		F	
	T	F	
	F	T	

Úloha 1.138. Ověřte, že hodnota hry ROPUCHY A SKOKANI

T		F		

je 1. uloha

Úloha 1.139. Jsou dány dva řádky hry ROPUCHY A SKOKANI.

T	T		F	F
T		T	F	F

.

Proveďte úplnou analýzu této hry.

Úloha 1.140. Zjednodušte:

1. $\left\{2, 2\frac{1}{2} \,\middle|\, 3, 6\right\}$
2. $\{0, \uparrow \mid 1\}$
3. $\{\uparrow \mid 0\}$
4. $\left\{\frac{3}{8} \,\middle|\, \frac{3}{4}\right\}$
5. $\left\{1 \,\middle|\, 3\frac{7}{8}\right\}$
6. pozici ve hře ROPUCHY A ŽÁBY

F	T		F

7. $\left\{\frac{1}{2} + \uparrow \mid 1\right\}$.

Úloha 1.141. Spočtené hodnoty hry Ropuchy a Žáby:

1. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline T & T & \ & F & F \\ \hline\end{array} = *$
2. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \ & T & T & \ & F & F \\ \hline\end{array} = \left\{\uparrow \mid -\frac{1}{4}\right\}$
3. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \ & T & \ & T & F & F \\ \hline\end{array} = \uparrow$
4. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline F & T & \ & T & \ & F \\ \hline\end{array} = 1*$
5. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline T & \ & F & F & T & \ \\ \hline\end{array} = \left\{1 \mid \frac{1}{2}\right\}$
6. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline T & \ & F & F & \ & T \\ \hline\end{array} = \left\{0 \mid -\frac{1}{2}\right\}$.

uloha

Úloha 1.142. Určete součet her Ropuchy a Žáby

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline T & T & \ & F & T & F \\ \hline \ & T & T & \ & F & F \\ \hline T & T & F & \ & F & T \\ \hline\end{array}.$$

uloha

Úloha 1.143. Nalezněte hodnotu hry Ropuchy a Žáby $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline T & \ & \ & F & T & F \\ \hline\end{array}$.

Úloha 1.144. Pro hru $G \equiv \{\{4 \mid 3\} \mid \{1 \mid -1\}\}$:

1. Nakreslete termograf hry G.
2. Najděte fazy interval hry G.
3. Jaký je průměr hry (mean) G?
4. Jaká je teplota hry G?

Úloha 1.145. Nechť $G \equiv \{\{7 \mid 5\}, \{10 \mid \{5 \mid 3\}\} \mid \{1 \mid 0\}, \{7 \mid 0\}\}$.

1. Nakreslete termograf hry G.
2. Nalezněte teplotu hry G.
3. Nalezněte průměr hry G.
4. Kdo ve hře vyhraje?
5. Kdo vyhraje ve hře $7 \cdot G - 20$?

Úloha 1.146. Nalezněte termograf hry $\{\{4 \mid 3\} \mid \{1 \mid -1\}\}$, fazy interval, průměr (mean) a teplotu hry.

Úloha 1.147. Nalezněte fazy interval $\{\{4 \mid 1\} \mid \{0 \mid -1\}\}$. Nalezněte dále průměr (mean) a termograf hry.