Hra a hry

Václav Vopravil

Úvod

1 Kombinatorické hry

Teorie kombinatorických her se zabývá abstraktními hrami dvou hráčů. Hra je definována pomocí jednodušších her, tj. jako uspořádaná dvojice množin her. Obvykle hra G se označuje jako

$$G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\},$$

kde G^L a G^R jsou množinami her a odpovídají možným tahům dvou hráčů, které jsou označovány jako levý L a pravý R. Pokud obě množiny G^L a G^R jsou prázdné $\varnothing$, potom existuje jednoznačně určená hra $\{\varnothing \mid \varnothing\}$, která se jmenuje 0, tj. $0 \equiv \{\varnothing \mid \varnothing\}$.

Dvě hry se nazývají identické, pokud jejich levé a pravé možnosti množiny tahů splývají, tj. $x \equiv y \Leftrightarrow X^L = Y^L \wedge X^R = Y^R$. To znamená, že hry x a y mají stejný tvar (na pravé straně máme množinovou rovnost). Pokud $x \equiv \left\{X^L \mid X^R\right\}$ je hra, potom typický prvek množiny X^L označujeme x^L (typický tah levého hráče v x) a typický prvek množiny X^R označujeme x^R (analogicky typický tah pravého hráče v x).

Je-li $(\{x_1, x_2, \ldots\}, \{y_1, y_2, \ldots\})$, budeme často psát jednoduše $\{x_1, x_2, \ldots \mid y_1, y_2, \ldots\}$, tj. zbytečné závorky nebudeme psát. Označování se tak zpřehlední. Místo $y \equiv (\{z\}, \varnothing)$ budeme psát $y \equiv \{z \mid\}$, etc. Pro hru x budeme také psát $x \equiv \left\{x^L \mid x^R\right\}$.

Příklad 1.1.

1. $0 \equiv \{\mid\} \equiv (\varnothing, \varnothing)$ je nejjednodušší hra, ve které žádný z hráčů nemůže táhnout. V této hře první hráč prohraje a druhý hráč vyhraje. Hra se nazývá nula.
2. $1 \equiv \{0 \mid\} \equiv (\{0\}, \varnothing)$ je hra, ve které levý hráč si může vybrat jediný tah do hry 0 a pravý hráč nemůže táhnout.
3. Naopak hra $-1 \equiv \{\mid 0\} \equiv (\varnothing, \{0\})$. Minus jednička je nedělitelný symbol, značka. V této hře může pravý hráč zahrát do 0, ale levý hráč nemá pravidly povolený tah.
4. $* \equiv \{0 \mid 0\} \equiv (\{0\}, \{0\})$ je hra star. Oba hráči si svým prvním tahem mohou zahrát do hry 0. Hra $*$ je základem tzv. Nim her.

Úmluva 1.2. Hráč, který nemůže ze své pozice táhnout, prohrál a soupeř vyhrál. Hra nemůže být nekonečná, každým tahem se zjednoduší. Klesající řetězec jednodušších a jednodušších her skončí u hry 0.

Definice 1.3. Pro každou hru $x \equiv \left\{x^L \mid x^R\right\}$

$x \geq 0 \Leftrightarrow (\forall x^R \in X^R)\ x^R \mathrel{\|}\!\!> 0$	($R \leadsto L$; levý vyhraje, nebude-li začínat.)
$x \mathrel{\|}\!\!> 0 \Leftrightarrow (\exists x^L \in X^L)\ x^L \geq 0$	($L \leadsto L$; levý vyhraje, bude-li v x začínat.)
$x \leq 0 \Leftrightarrow (\forall x^L \in X^L)\ x^L <\!\!\mathrel{\|} 0$	($L \leadsto R$; pravý vyhraje, nebude-li v x začínat.)
$x <\!\!\mathrel{\|} 0 \Leftrightarrow (\exists x^R \in X^R)\ x^R \leq 0$	($R \leadsto R$; pravý vyhraje, bude-li v x začínat.)
$x > 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \mathrel{\|}\!\!> 0$	($\leadsto L$; kladná hra, vyhraje levý hráč.)
$x < 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \wedge x <\!\!\mathrel{\|} 0$	($\leadsto R$; záporná hra, vyhraje pravý hráč.)
$x \parallel 0 \Leftrightarrow x \mathrel{\|}\!\!> 0 \wedge x <\!\!\mathrel{\|} 0$	($\leadsto 1$; fazy hra, vyhraje první hráč.)
$x = 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 0$	($\leadsto 2$; nulová hra, vyhraje druhý hráč.)

Vyhraje hráč znamená, že má vyhrávající strategii, tj. taková vyhrávající strategie existuje. Při vítězné strategii existuje taková posloupnost tahů, která zaručí hráči vítězství, bez ohledu na možné soupeřovy tahy. Takže ve hře ($x \geq 0$) začne-li pravý hráč jakkoliv, levý nalezne vítěznou pozici, která mu zabezpečí vítězství bez ohledu na další možné tahy pravého hráče atd.

Příklad 1.4.
1. $0 \equiv \{|\}$ hra, ve které žádný z hráčů nemůže táhnout, je nevýhodné začínat, vyhraje druhý hráč.
2. $1 \equiv \{0 \mid\}$ je hra kladná, vyhraje levý hráč.
3. Naopak hra $-1 \equiv \{\mid 0\}$ záporná hra, vyhraje pravý hráč.
4. $* \equiv \{0 \mid 0\}$ vyhraje první hráč, tj. hráč na tahu.

Věta 1.5. *Pro každou hru x platí*

1. $\neg(x \geq 0 \wedge x <\!\!\mathrel{\|} 0)$,
2. $\neg(x \leq 0 \wedge x \mathrel{\|}\!\!> 0)$.

Důkaz: □

2 Součet her

Sčítání her se hraje ve dvou (nebo více) komponentách. Hráč na tahu si vybere jednu z nich a v ní udělá pravidly povolený tah. Zbylé komponenty zůstanou nezměněny.

Definice 2.1.

$$x + y \equiv \left\{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\right\}$$

Příklad 2.2.
1. $0 + 0 \equiv \{|\} + \{|\} \equiv \{|\} \equiv 0$,
2. $1 + 0 \equiv \{0 \mid\} + \{|\} \equiv \{0 + 0 \mid\} \equiv 1$,
3. $0 + (-1) \equiv \{|\} + \{\mid 0\} + \equiv \{\mid 0 + 0\} \equiv -1$,
4. $1 + (-1) \equiv \{0 \mid\} + \{\mid 0\} \equiv \{-1 \mid 1\}$.

Závěr 2.3. *(Monoid her) Hry tvoří komutativní monoid s nulovým prvkem 0.*

Věta 2.4. *Pro libovolné hry x, y, z platí:*

1. $x + 0 \equiv x$,

2. $x + y \equiv y + x$,
3. $x + (y + z) \equiv (x + y) + z$.

Důkaz: □

Závěr 2.5. *(Grupa her) Hry tvoří komutativní grupu s nulovým prvkem 0.*

Věta 2.6. *Výsledek hry a sčítání (strategická hodnota): Pro libovolné hry x, y platí:*

1. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$,
2. $x \geq 0 \wedge y \mathrel{|\!\!>} 0 \Rightarrow x + y \mathrel{|\!\!>} 0$,
3. $x + y \geq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow x \geq 0$,
4. $x + y \geq 0 \wedge y \mathrel{<\!\!|} 0 \Rightarrow x \mathrel{|\!\!>} 0$,
5. $x + y \mathrel{|\!\!>} 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow x \mathrel{|\!\!>} 0$.

Poznámka: Jak se asi bude hrát první implikace? Začne-li pravý ve hře x, bude druhý hráč odpovídat ve stejné komponentě (zde $R \rightsquigarrow L$). A podobně ve všech dalších případech.

Důkaz: □

3 Rozdíl her

Definice 3.1. V opačné hře $-x$ vyměníme role levého a pravého hráče.

$$-x \equiv \left\{ -x^R \;\middle|\; -x^L \right\}$$

Rozdíl her x, y převedeme na součet, tj.

$$x - y \equiv x + (-y) \equiv \left\{ x^L - y, x - y^R \;\middle|\; x^R - y, x - y^L \right\}.$$

Příklad 3.2.
1. $-0 \equiv -\{|\} \equiv \{|\} \equiv 0$,
2. $-1 \equiv -\{0 \mid\} \equiv \{\mid -0\} \equiv \{\mid 0\} \equiv -1$, (na levé straně máme opačnou hru ke hře 1, na pravé straně hru minus jedna),
3. $-* \equiv -\{0 \mid 0\} \equiv \{-0 \mid -0\} \equiv \{0 \mid 0\} \equiv *$,
4. $1 - 1 \equiv 1 + (-1) \equiv \{-1 \mid 1\}$.

Věta 3.3. *Pro libovolnou hru x platí:*

1. $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$,
2. $x \mathrel{<\!\!|} 0 \Leftrightarrow -x \mathrel{|\!\!>} 0$,
3. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$.

Důkaz: □

Věta 3.4. *Pro libovolné hry x, y platí:*

1. $-(-x) \equiv x$,
2. $-(x + y) \equiv (-x) + (-y)$,
3. $-(x - y) \equiv y - x$,

4. $x - x = 0$.

Poslední vlastnost je rovnost!

Důkaz: □

4 Uspořádání

Definice 4.1. Pro libovolné dvě hry x, y platí

$$x\varrho y \Leftrightarrow (x-y)\varrho 0, \text{ pro všechny } \varrho \in \{\geq, \leq, \mathrel{|\!\rhd}, \mathrel{\lhd\!|}, >, <, =, \mathrel{||}\}.$$

Strategická interpretace slovy je např. $x \geq y$ znamená, že hra x je pro levého nejméně tak dobrá, jako hra y, a pod. v ostatních případech.

Věta 4.2. *Pro libovolné hry x, y platí*

1. $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow -x \geq -y$,
2. $x \mathrel{\lhd\!|} y \Leftrightarrow y \mathrel{|\!\rhd} x \Leftrightarrow -x \mathrel{|\!\rhd} -y$,
3. $x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow -x > -y$.

Důkaz: □

Věta 4.3. *Pro libovolné dvě hry x, y platí*

1. $x \leq y \Leftrightarrow (\forall x^L \in X^L)\ x^L \mathrel{\lhd\!|} y$ *a současně* $(\forall y^R \in Y^R)\ x \mathrel{\lhd\!|} y^R$,
2. $x \mathrel{\lhd\!|} y \Leftrightarrow (\exists x^R \in X^R)\ x^R \leq y$ *nebo* $(\exists y^L \in Y^L)\ x \leq y^L$,
3. $x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \mathrel{|\!\rhd} y$,
4. $x = y \Leftrightarrow x \geq y \wedge y \geq x$,
5. $x \mathrel{||} y \Leftrightarrow x \mathrel{|\!\rhd} y \wedge x \mathrel{|\!\rhd} y$.

Důkaz: □

Věta 4.4. *(Vlastnosti uspořádání) Pro libovolné tři hry x, y, z platí:*

1. $x \geq x$,
2. $x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z$,
3. $x \geq y \wedge y \mathrel{|\!\rhd} z \Rightarrow x \mathrel{|\!\rhd} z$,
4. $x \geq y \Leftrightarrow x + z \geq y + z$,
5. $x \mathrel{|\!\rhd} y \Leftrightarrow x + z \mathrel{|\!\rhd} y + z$,
6. $(\forall x^L \in X^L)(\forall x^R \in X^R)\ x^L \mathrel{\lhd\!|} x \wedge x \mathrel{\lhd\!|} x^R$.

Důkaz: □

Věta 4.5. *(Vlastnosti ostrého uspořádání) Pro libovolné hry x, y, z platí:*

1. $\neg(x > x)$,
2. $x > y \Rightarrow \neg(y > x)$,

3. $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$,
4. $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z$.

Důkaz: $\square$

Závěr 4.6. *Relace $\geq$ je uspořádání (reflexivní a tranzitivní relace), které generuje relaci ekvivalence $=$ a relace $>$ je ostré uspořádání.*

5 Kongruence

Víme, že relace $=$ je ekvivalence. Tato relace je v souladu se sčítáním a odčítání:

Věta 5.1. *Pro libovolné tři hry platí*

1. $x = y \Rightarrow x + z = y + z$,
2. $x = y \Rightarrow -x = -y$.

Důkaz: $\square$

Věta 5.2. *Pro všechny hry $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z$ platí:*

1. $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$,
2. $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2$,
3. $x = y \wedge y \varrho z \Rightarrow x \varrho z$ *pro všechny* $\varrho \in \{\geq, \rhd, >, \parallel\}$,
4. $x \varrho y \wedge y = z \Rightarrow x \varrho z$ *pro všechny* $\varrho \in \{\geq, \rhd, >, \parallel\}$.

Závěr 5.3. *Hry tvoří částečně uspořádanou Abelovu grupu modulo $=$.*

Věta 5.4. *Je-li* $G \equiv \left\{A, B, G^L \setminus \{A, B\} \;\middle|\; G^R\right\}$ *a* $A \leq B$, *potom* $G = \left\{B, G^L \setminus \{A, B\} \;\middle|\; G^R\right\}$.

Důkaz: $\square$

6 Nadreálná čísla

Definice 6.1. Hru x nazveme (nadreálným) číslem, právě tehdy a jen tehdy, platí-li současně:

1. $(\forall x^L \in X^L)(\forall x^R \in X^R)\ x^L \lhd x^R$,
2. všechny $x^L \in X^L$ a všechny $x^R \in X^R$ jsou čísla.

Příklad 6.2. 1. Hra $0 \equiv \{|\}$,
2. $1 \equiv \{0\,|\}$,
3. $-1 \equiv \{|\,0\}$,

jsou čísla, $*$ není číslo.

Věta 6.3. *Pro všechna čísla x, y platí:*

1. $(\forall x^L \in X^L)(\forall x^R \in X^R)\ x^L < x < x^R$,
2. $x \lhd\!\!| \ y \Leftrightarrow x < y$,
3. $-x$ *a* $x + y$ *jsou čísla.*

Důkaz: $\square$

Věta 6.4. *(O redukci) Věta o nejstarším prvku*

Poznámka: Čísla množiny $\mathbb{Z}[1/2]$, tj. racionální čísla tvaru $m/2^k$ pro $m \in \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}$, se nazývají dyadická (racionální) čísla.

Věta 6.5. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{Z})$

1. $0 \equiv \{|\}$ *je nulový prvek,*
2. $n \equiv \{n - 1\ |\}$,
3. $-n \equiv \{|\ -(n-1)\}$,
4. $n + 1/2 \equiv \{n \mid n+1\}$,
5. $\frac{2m+1}{2^k} \equiv \left\{\frac{m}{2^{k-1}} \mid \frac{m+1}{2^{k-1}}\right\}$.

Příklad 6.6.

7 Reálná čísla

Definice 7.1. (Reálná nadreálná čísla) Nechť x je nadreálné číslo. Toto číslo se nazývá reálné číslo, pokud platí současně tyto dvě podmínky:

1. Existuje takové $n \in \mathbb{N}$, pro které $-n < x < n$,
2. $(\forall x^L \in X^L)(\exists m \in \mathbb{N})\ x - x^L > 2^{-m}$ a současně $(\forall x^R \in X^R)(\exists m \in \mathbb{N})\ x^R - x > 2^{-m}$.

Úloha 7.2.
1. Vytvořte čísla $3/8$ a $5/8$ jako nadreálná čísla a ověřte, že $3/8 + 5/8 = 1$. Definujte všechna další čísla, která využijete.
2. Vytvořte čísla $2/5$ a $5/8$ jako nadreálná čísla a ověřte, že $2/5 + 3/5 = 1$. Předpokládejte, že všechna dyadická racionální čísla jsou již vytvořena.

[2hs03RMF actual rosemeier.tex, 09/01/14, 08:26]