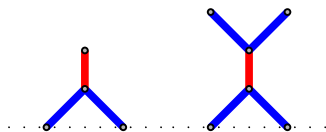


1 Úlohy

1. Ve hře HACKENBUSH ukažte, že hodnota na prvním obrázku je 1 a nalezněte hodnotu hry na druhém obrázku:



2. Ve hře HACKENBUSH nalezněte hodnotu pozice ...  ...

⁽¹⁾TODO: K!

3. Nakreslete hada hry HACKENBUSH s hodnotou $2\frac{3}{4}$.
4. Uvažujme výrok: Pro vlastní hry (hry, které nejsou čísla) G a H platí: Je-li $G > 0$ a $H < 0$, potom $G + H \parallel 0$. Zjistěte, zda věta platí a větu dokažte. V případě, že věta neplatí, nalezněte vhodný příklad.
5. Nechť $G \parallel H$ a $H \parallel K$. Co můžeme říct o hře G ? Uvažujte tyto tři speciální případy:
- $G = 0, H = *, K = 0$
 - $G = \uparrow, H = *, K = 0$
 - $G = \downarrow, H = *, K = \uparrow$.
- V každém příkladu napište relace mezi G, H a K . Pomohou nám tyto případy říct obecně, kde G leží?
6. Hra NIM má 4 hromádky, s 17, 5, 12 a 11 kameny. Jak odpoví druhý hráč, pokud první odebral z první hromádky 9 kamenů?
7. Nalezněte nim číslo $\bullet n$ takové, že ve hře $\bullet 7 + \bullet n + \bullet 4 = 0$.
8. Nalezněte nim číslo $\bullet n$ takové, že ve hře $\bullet 32 + \bullet n + \bullet 5 + \bullet 17$ vyhraje druhý hráč.
9. Nalezněte nim číslo $\bullet n$ takové, že ve hře $\bullet n + \bullet 21 + \bullet 5 + \bullet 17$ vyhraje druhý hráč.
10. Nalezněte nim číslo $\bullet n$ takové, že $n \oplus 24 \oplus 11 \oplus 9 \oplus 2$ je \mathcal{P} pozice.
11. Nalezněte součet $64 \oplus 128 \oplus 4 \oplus 32 \oplus 2$.
12. Přiřaďte číselné hodnoty následujícím hrám: $\{3 \mid 5\}$, $\{3 \mid 6\}$, $\{-1/2 \mid 5\}$ a $\{1/4 \mid 7/8\}$.
13. Nalezněte den narození následujících čísel:

$$0, \quad 6, \quad -1/2, \quad 17/32, \quad 2\frac{1}{2}, \quad \{5, 6 \mid 9\}, \quad \{1/8 \mid 21/32\}.$$

14. Následující dvě řádky znázorňují pozice ve hře ROPUCHY A ŽÁBY

T	T		F	F
T		T	F	F

Proveďte úplnou analýzu této hry. Kdo vyhraje?

15. Nalezněte nim posloupnost hry s odečítáním s množinou $S = \{1, 2, 4\}$. Uměli byste přidat do množiny S další číslo tak, aby se posloupnost nezměnila?
16. Uvažujme hru s odčítáním $S = \{2, 3, 5\}$. Ukažte, že Sprague–Grundyova posloupnost je periodická s periodou 7.

17. Uvažujme hru s odčítáním $S = \{3, 6, 7\}$. Ukažte, že Sprague–Grundyova posloupnost je periodická s periodou 10.
18. Proved'te kontrolu ve hře DOMINO: Platí

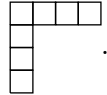
$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \{2 \mid 0\} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} = \{1* \mid -1*\}.$$

19. Uvažujme tyto dvě pozice ve hře DOMINO :

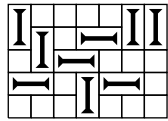
$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad H = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}.$$

Ukažte, že hodnoty jsou $G = \{2, \{1 \mid -1\}, * \mid 0, 1/2\}$ a $H = \{2, \{1 \mid -1\} \mid 0, -1/2, *\}$.
Potom ukažte:

- (a) Pozice se mohou zapsat jednodušeji, a to $G = \{2 \mid 0\}$ a $H = \{2 \mid -1/2\}$.
(b) Ukažte, že levý preferuje G nad H (tj. $G > H$).
20. Následující hra DOMINO má hodnotu $*$:



21. Uvažujme následující pozici v nestranné variantě hry DOMINO (CRAM), ve které byly provedeny následující tahy:



- (a) Hra je ekvivalentní hře NIM na třech hromádkách.
(b) Jaké jsou hodnoty izolovaných částí?
(c) Jedná se o pozici \mathcal{P} nebo o \mathcal{N} ?
22. Uvažujme následující partyzánskou verzi hry DOMINO G , která se rozpadne po prvním tahu takto:

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right\} = \{0, \{2 \mid 0\} \mid \{0 \mid -2\}, \{1/2 \mid -2\}\}.$$

Hru G zjednodušte!

23. Ukažte, že hru $\{\uparrow, * \mid 0, 1\}$ lze zestručnit na $\{0, * \mid 0\}$.
24. Pro hru $G = \{\{5 \mid 4\} \mid \{1 \mid -2\}\}$. Dokažte:
(a) $G > 0$
(b) $G \parallel 3$
(c) $G < 4$.