1 Nadreálná čísla, poznámky k úlohám

1.1 Induktivní definice nadreálných čísel

Ke zjednodušení následujících úvah využijeme úmluvy: *Nadreálné číslo* x budeme zapisovat jako $\left\{X^L \mid X^R\right\}$, X^L se nazývá *levá množina* a X^R se nazývá *pravá množina.* Prvky množin se nazývají také *možnosti.* Binární relace $\leqslant$ ještě sice není v tuto chvíli definovaná, ale budeme psát $x \leqslant y$ v obvyklém významu, tj. x je menší nebo rovno y; zápis $x \nleqslant y$ bude znamenat $\neg(x \leqslant y)$. Nejdříve zavedeme *rekurzivní definici* nadreálného čísla a ještě nutnou *relaci uspořádání* $\leqslant$.

Definice 1.1. Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$, kde X^L a X^R jsou množinami již vytvořených nadreálných čísel. Potom x nazýváme *nadreálné číslo* právě tehdy a jen tehdy, když pro všechna $x^L \in X^L$ a $x^R \in X^R$ platí $x^R \nleqslant x^L$. Všechna nadreálná čísla jsou vytvořena tímto způsobem.

Definice 1.2. Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ a $y = \left\{Y^L \mid Y^R\right\}$ jsou nadreálná čísla. Potom $x \leqslant y$ právě tehdy a jen tehdy, když $\forall x^L \in X^L,\ y \nleqslant x^L$ a $\forall y^R \in Y^R,\ y^R \nleqslant x$.

Tak jako v každé jiné rekurzivní definici potřebujeme první prvek. V případě nadreálných čísel bude kandidátem $0 = \{\varnothing \mid \varnothing\}$.

Lemma 1.3. 0 *je nadreálné číslo a dále platí* $0 \leqslant 0$.

Důkaz: Prázdná množina $\varnothing$ je také prázdnou množinou nadreálných čísel (vlastnost prázdné množiny). Z vlastnosti prázdné množiny také plyne druhá vlastnost z definice 1.1, protože všechny uvažované množiny jsou prázdné, tj. $0^L = 0^R = \varnothing$. I druhá vlastnost lemma plyne z vlastností prázdných množin triviálně, protože $X^L = Y^R = \varnothing$, prvky prázdné množiny neexistují. □

1.2 Relace uspořádání

Předtím, než-li budeme hledat následující nadreálná čísla a některé jejich vlastnosti, budeme se zabývat *lineárním uspořádáním nadreálných čísel.* Nyní ukážeme, že všechna nadreálná čísla jsou vzhledem k relaci $\leqslant$ tranzitivní, porovnatelná a reflexivní. Přijmeme označení nuly $0 = \{\varnothing \mid \varnothing\}$, protože to zjednoduší naše úvahy. Poznamenejme, že tranzitivnost závisí pouze na předcházejících definic 1.1 a 1.2.

Lemma 1.4. *Relace* $\leqslant$ *je reflexivní.*

Důkaz: (Sporem.) Předpokládejme, že existuje nějaké x a že toto x je první, pro které neplatí $x \leqslant x$. Protože $x \nleqslant x$, podle definice $\leqslant$ platí také $x \leqslant x^L \vee x^R \leqslant x$. Z první části disjunkce ale platí $x \leqslant x^L \Leftrightarrow x^L \nleqslant x^L \wedge x^{LR} \nleqslant x$. Tedy existuje i dřívější $x^L \nleqslant x^L$ nereflexivní případ (spor.) Zbylá část (předpoklad $x^R \leqslant x$) se ke sporu přivede analogicky. □

Věta je zajímavá nejen sama o sobě, ale z jejího důkazu plyne i omezení $x \nleqslant x^L$ a $x^R \nleqslant x$. Což zanedlouho povede dokonce na silnější tvrzení pro čísla $x^L < x < x^R$.

Lemma 1.5. *Binární relace $\leqslant$ je tranzitivní.*

Důkaz: (Sporem.) Předpokládejme, že relace $\leqslant$ není tranzitivní, tj. pro nějaká $x \leqslant y$ a $y \leqslant z$ platí $x \nleqslant z$. Podle 1.2 tedy musí být splněno nejméně jedno z tvrzení:

1. Existuje nějaké $x^L \in X^L$ takové, že $z \leqslant x^L$,
2. Existuje nějaké $z^R \in Z^R$ takové, že $z^R \leqslant x$.

Předpokládejme nejdříve, že platí první tvrzení, tj. předpokládáme, že platí $x \leqslant y, y \leqslant z$ a $z \leqslant x^L$. Tato trojice x, y, z je nejjednodušší, tj. první v induktivním procesu tvoření her. Z poslední nerovnosti a z druhé plyne díky tranzitivnosti $y \leqslant z \leqslant x^L$, tedy $x \leqslant x^L$ (spor s předcházející větou). □

Dále musíme ukázat, že pro každá dvě nadreálná čísla x, y je buď $x \leqslant y$ nebo $y \leqslant x$ (neostrá relace je antisymetrická). Nejdříve dokážeme pomocnou větu, která nám také nadreálná čísla omezí, viz také důsledek reflexivnosti.

Lemma 1.6. *Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ je nadreálné číslo. Potom pro každé x^L, $x^L \leqslant x$ a pro každé x^R, $x \leqslant x^R$.*

Důkaz: Dokážeme první tvrzení, druhé je analogické. (Sporem.) Předpokládejme, že existuje nejjednodušší $x^L \nleqslant x$. Podle definice je potom buď $x \leqslant x^{LL}$ nebo $x^R \leqslant x^L$. Druhé tvrzení je ve sporu, protože x je číslo. První tvrzení je také ve sporu, protože dostaneme ještě jednodušší možnost $x^{LL} \nleqslant x^L$. □

Poznamenejme, že každý klesající řetězec je konečný, a skončí u čísla 0.

Lemma 1.7. *Nechť x a y jsou nadreálná čísla. Potom platí $x \leqslant y$ nebo $y \leqslant x$ (nebo obě nerovnosti).*

Důkaz: (Sporem.) Předpokládejme, že platí $x \nleqslant y \wedge y \nleqslant x$. Z první části konjunkce platí alespoň jedno z 1) $y \leqslant x^L$ nebo 2) $y^R \leqslant x$. Z druhé části konjunkce pak 3) $x \leqslant y^L$ nebo 4) $x^R \leqslant y$. Předpokládejme, že třeba platí 1) a 4), potom $y \leqslant x^L \wedge x^R \leqslant y$, což díky tranzitivnosti znamená i $x^R \leqslant x^L$, což je spor s definici 1.1. Předpokládejme, že platí 1) a 3). Potom jistě platí $y \leqslant x^L \wedge x \leqslant y^L$, což je okamžitě spor s tím, že x a y jsou čísla a platí tranzitivnost relace $\leqslant$. Ostatní části důkazu jsou analogické. □

Poznamenejme, že z předcházejícího lemmatu 1.7 plyne implikace $x \nleqslant y \Rightarrow y \leqslant x$. Pomocí definic $\leqslant$ a $\nleqslant$ můžeme definovat další obvyklé definice $\equiv, \geqslant, \ngeqslant, <$ a $>$.

1. $x \equiv y \Leftrightarrow x \leqslant y$ a $y \leqslant x$,
2. $x \geqslant y \Leftrightarrow y \leqslant x$,
3. $x \ngeqslant y \Leftrightarrow y \nleqslant x$,
4. $x < y \Leftrightarrow x \leqslant y$ a $y \nleqslant x$,
5. $x > y \Leftrightarrow y < x$.

Úloha 1.8. Zjistěte, která z předcházejících relací je také tranzitivní.

Není těžké ukázat, že třeba rovnost (ekvivalence, kongruence) je tranzitivní. Například $x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \leqslant y \leqslant z$ a $z \leqslant y \leqslant x$, $x \leqslant z$ a $z \leqslant x$ a tedy $x \equiv z$. Důsledek reflexivnosti relace $\leqslant$ nyní můžeme zapsat jako $x^L \ngeqslant x \ngeqslant x^R$. Díky 1.6 dokonce $x^L < x < x^R$.

Důsledkem lemmatu 1.7 je úvaha $x \nleqslant y \Leftrightarrow x \nleqslant y \wedge y \leqslant x \Leftrightarrow y < x$.

Lemma 1.9. *Binární relace $<$ není reflexivní.*

Důkaz: (Sporem.) Předpokládejme $x < x$, potom $x \leqslant x$ a $x \nleqslant x$, což je spor. □

1.3 Další nadreálná čísla

K dispozici máme zatím prázdnou množinu a první číslo $0 = \{\varnothing \mid \varnothing\}$, takže máme dvě podmnožiny $\varnothing$ a $\{0\}$. Pomocí těchto množin můžeme vytvořit podle definice 1.1 tři nové následující objekty: $\{\{0\} \mid \varnothing\}$, $\{\varnothing \mid \{0\}\}$ nebo $\{\{0\} \mid \{0\}\}$. Abychom zjednodušili naše zápisy, dohodneme se, že zbytečné množinové závorky budeme vynechávat a psát pouze prvky množin pokud nedojde k nedorozumění, takže tři možná nová čísla budeme psát jednodušeji takto: $\{0 \mid\}$, $\{\mid 0\}$ a $\{0 \mid 0\}$. Protože $0 \leqslant 0$, poslední objekt není číslo. První dvě označíme jako obvykle $1 = \{0 \mid\}$ a $-1 = \{\mid 0\}$, a ukážeme, že jsou čísla. Objekty 1 a -1 splňují definici 1.1, protože obsahují levou, nebo pravou množinu prázdnou a jsou nerovnosti triviálně splněny. Například pro $\{0 \mid\}$ žádný prvek pravé množiny není menší než O^L (takový prvek neexistuje) a ani 0^L nemůže být větší než prvek, který neexistuje. Navíc dokonce platí $0 < 1$. (To je také důvod, proč jsme jedno číslo označili jedničkou a druhé jinak). Z vlastností prázdné množiny (tj. nemá žádné prvky) ihned plyne $0 \leqslant 1$. Z podobných důvodů zjistíme $-1 \leqslant 0$ a $1 \nleqslant 0 \nleqslant -1$, takže $-1 < 0 < 1$ a díky tranzitivnosti dokonce $-1 < 1$.

Užitečným nástrojem teorie nadreálných čísel je indukce podle dne narození (první objevení daného čísla). Každé nadreálné číslo vzniká postupně z předcházejících čísel a nadreálná čísla jsou vytvářena induktivně podle definice 1.1. První den, kdy se objeví dané číslo se nazývá *den narození* daného čísla. Například 0 se narodila nultého dne, 1 první den a pod. dále. Druhý (následující den) máme k dispozici množinu $\{0, 1, 2\}$ a kombinatoricky můžeme vytvářet další objekty, tj. $\{\mid -1\}$, $\{-1 \mid 0\}$, $\{-1 \mid 1\}$, $\{0 \mid 1\}$, $\{1 \mid\}$. Vznikají ale i další objekty $\{1 \mid -1\}$ (není číslo), $\{-1 \mid\}$ (jiné označení čísla 0) a pod. Uvažte také, že čísla jsou lineárně uspořádána, a tak lze porovnat $\{-1 \mid\}$ a 0. Vidíme, že nadreálná čísla vznikají znova a mají různá označení. Například i číslo $\{-1 \mid 1\}$ je jen jiným označením čísla 0. (Podle definice rovnosti a výpočtů z přecházejícího odstavce). Druhý den ještě vznikají objekty pomocí dvou- a tříprvkové množiny, například $\{-1, 0 \mid 1\}$. Porovnáme-li ale toto číslo s $\{0 \mid 1\}$, zjistíme, že jsou stejná. Ukazuje se, že na příliš malých číslech v levé množině a příliš velkých číslech pravé množiny nezávisí hodnota čísla. Po prozkoumání vlastností objektů se zjišťuje, že druhý den vznikají právě čísla $\{\mid -1\} < -1 < \{-1 \mid 0\} < 0 < \{0 \mid 1\} < 1 < \{1 \mid\}$. Druhého dne vznikají nová čtyři čísla, která budeme označovat po řadě $-2, -\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}, 2$. Užitečnost tohoto nového označení vyplyne z následujících definic binárních operací nad nadreálnými čísly.

1.4 Aritmetika nadreálných čísel

Sčítání, odčítání, násobení je definováno opět rekurzivními formulemi.

Definice 1.10. (Opačného prvku) Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$, je číslo, potom

$$-x = \left\{-(X^R) \mid -(X^L)\right\},$$

kde $-M = \{-m;\ m \in M\}$.

Definice 1.11. (Sčítání) Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$, $y = \left\{Y^L \mid Y^R\right\}$ jsou čísla, potom

$$x + y = \left\{X^L + y, x + Y^L \mid X^R + y, x + Y^R\right\},$$

kde $M + m' = \{m + m';\ m \in M\}$ a $m' + M = \{m' + m;\ m \in M\}$.

Protože definice jsou rekurzivní, podíváme se na několika příkladech, jak rekurence funguje.

$$\begin{aligned}
-0 &= -\{\varnothing \mid \varnothing\} = \{-\varnothing \mid -\varnothing\} = \{\varnothing \mid \varnothing\} = \{|\} = 0\\
-(1) &= -\{0\ |\} = \{|\ -0\} = \{|\ 0\} = -1\\
-(-1) &= -\{|\ 0\} = \{-0\ |\} = \{0\ |\} = 1\\
0 + 0 &= \{|\} + \{|\} = \{\varnothing + 0, 0 + \varnothing \mid \varnothing + 0, 0 + \varnothing\} = \{|\} = 0\\
0 + 1 &= \{|\} + \{0\ |\} = \{\varnothing + 0, 0 + 0 \mid \varnothing + 1, 0 + \varnothing\} = \{0\ |\} = 1,\\
1 + 1 &= \{0\ |\} + \{0\ |\} = \{0 + 1, 1 + 0 \mid \varnothing + 1, 1 + \varnothing\} = \{0 + 1\ |\} = \{1\ |\} = 2\\
0 + \{0 \mid 1\} &= \{\varnothing + \{0 \mid 1\}, 0 + 0 \mid \varnothing + \{0 \mid 1\}, 0 + 1\} = \{0 + 0 \mid 0 + 1\} = \{0 \mid 1\}\\
1 + \{0 \mid 1\} &= \{0 + \{0 \mid 1\}, 1 + 0 \mid \varnothing + \{0 \mid 1\}, 1 + 1\} = \{\{0 \mid 1\}, 1 \mid 2\} \equiv \{1 \mid 2\},\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Nechá se ukázat, že $1 < 1 + \{0 \mid 1\} < 2$, z poslední rovnosti (a nerovnosti) také platí $0 < \{0 \mid 1\} < 1$. Nyní se soustředíme na výpočet $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\}$ podle definice sčítání: $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = \{0 + \{0 \mid 1\}, \{0 \mid 1\} + 1 \mid 0 + \{0 \mid 1\}, \{0 \mid 1\} + 1\} = \{\{0 \mid 1\} \mid \{1 \mid 2\}\}$.

Poslední výraz je jiné označení pro 1. Totiž platí $\{\{0 \mid 1\} \mid \{1 \mid 2\}\} \equiv 1$. Musíme dokázat obě nerovnosti, tj. $\{\{0 \mid 1\} \mid \{1 \mid 2\}\} \leqslant 1$ a $\{\{0 \mid 1\} \mid \{1 \mid 2\}\} \geqslant 1$. Začneme s první: Nerovnost bude splněna díky pravé množině 1 prázdné pro $1 \nleqslant \{0 \mid 1\}$, což je pravdivé pro $\{0 \mid 1\} < 1$. Druhá nerovnost je analogická, dospějeme $\{1 \mid 2\} \nleqslant 1$, kterou můžeme jednoduše ověřit. Tyto výpočty vedou na označení $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$. Důsledek $\{-1 \mid 0\} = -\frac{1}{2}$.

Pro úplnost ještě definujme součin:

Definice 1.12. (Násobení) Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$, $y = \left\{Y^L \mid Y^R\right\}$, jsou čísla, potom

$$xy = \left\{X^L y + xY^L - X^L Y^L, X^R y + xY^R - X^R Y^R \mid X^L y + xY^R - X^L Y^R, X^R y + xY^L - X^R Y^L\right\}$$

kde $m'M = \{m'm;\ m \in M\}$, $Mm' = \{mm';\ m \in M\}$.

Je ještě nekonečně mnoho tvrzení, která jsou třeba ověřit, ale máme jen konečně mnoho času… (D. Knuth)

[Nadreálná čísla podruhé, 09/02/13, 10:51] Václav Vopravil