Definice $\mathbb{N}$o

Václav Vopravil

12. března 2015

1 Induktivně rekurzivní definice nadreálných čísel

Nadreálná čísla [ONAG, SN] jsou klasickou strukturou úplně uspořádaného Tělesa (tj. tělesa, kde nosičem je vlastní třída), která obsahuje jak reálná čísla, tak i uspořádaná ordinální čísla jako podstruktury. Obvyklá cesta konstrukce reálných je $\mathbb{N} \subseteq\subseteq \mathbb{Z} \subseteq\subseteq \mathbb{Q} \subseteq\subseteq \mathbb{R}$, se čtyřmi různými definicemi sčítání, různě zavedeným uspořádáním a ekvivalencí mezi podstrukturami. Přirozená čísla jsou v každé podstruktuře opětovně rekonstruována celkem třikrát jako celá čísla, racionální čísla a reálná čísla. Na druhé straně J. Conway konstruuje svá nadreálná čísla, která obsahují všechna zde zmiňována čísla, najednou, a to pomocí jedné definice!

Připomeňme si Dedekindovu metody řezů, konstrukci reálných čísel z racionálních čísel.

Definice 1.1. Dedekindův řez (L, R) se skládá ze dvou neprázdných podmnožin racionálních čísel L, R takových, že $L \cup R = \mathbb{Q}$, všechny prvky L jsou ostře menší než prvky množiny R a množina L neobsahuje největší prvek.

Nyní změníme tuto definici v tom smyslu, že nebudeme explicitně předpokládat existenci racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Definované objekty budeme nazývat nadreálná čísla.

Dále, když jsme vyloučili množinu $\mathbb{Q}$, množiny L a R nebudou množinami racionálních čísel. Místo toho budou množinami již dříve vytvořených nadreálných čísel.

Protože L, R nebudou podmnožinami $\mathbb{Q}$, nemá ani smysl podmínka $L \cup R = \mathbb{Q}$ a tuto podmínku vypustíme.

Nyní L, R budou množinami dříve vytvořených nadreálných čísel. Abychom lépe „nastartovali“ konstrukci, budeme předpokládat, že množiny L, R mohou být i prázdné (každá zvlášť, nebo i současně), popřípadě infinitní.

Nakonec změníme zápis a místo (L, R) budeme psát $\{L \mid R\}$, abychom odlišili nadreálná čísla od Dedekindových řezů.

Definice 1.2. Nadreálné číslo $\{L \mid R\}$ se skládá ze dvou množin L, R nadreálných čísel takových, že každé nadreálné číslo množiny L je menší než libovolný prvek množiny R. Všechna nadreálná čísla jsou vytvořena tímto způsobem. Třída nadreálných čísel se označuje $\mathbb{N}$o.

Pro nadreálné číslo X píšeme $\{X_L \mid X_R\}$ a také píšeme x^L pro typický prvek množiny X_L (tento prvek je nazýván také možnost v levé části X_L) a analogicky x^R je typický prvek pravé množiny X_R. Pomocí těchto úmluv o nadreálném číslu $\{L \mid R\}$ můžeme psát

$$(\forall x^L \in X_L)(\forall x^R \in X^R)\ x^L < x^R. \tag{1}$$

Intuice nám říká, že číslo $X = \{X_L \mid X_R\}$ je sevřeno mezi všemi x^L zleva a mezi všemi x^R zprava a je ze všech nejjednodušší. To vysvětluje zápis 1. X leží mezi X_L a X_R, a nemůže existovat prvek $x^L \in X_L$, který by byl větší nebo roven prvku $x^R \in X^R$, neboť bychom dostali

$$x^R \leq x^L < X < x^R,$$

což by vedlo ke sporu.

Conway preferuje místo relace $<$ relaci $\leq$ a pro čísla používá malá písmena, tedy

$$x < y \Leftrightarrow \neg(y \leq x).$$

Budeme ještě potřebovat definovat uspořádání. Formálně uspořádání se zavádí touto definicí:

Definice 1.3. Nechť $X = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ a $Y = \left\{Y^L \mid Y^R\right\}$ jsou nadreálná čísla. Říkáme, že $X \leq Y$ právě když

$$(\forall x^L \in X^L)\ \neg(Y \leq x^L) \ \text{ a } \ (\forall y^R \in Y^R)\ \neg(y^R \leq X).$$

1.1 Příklady nadreálných čísel

Pomocí množinových zápisů ukážeme několik prvních nadreálných čísel. Budeme psát místo $\{\{a, b, c, \ldots\} \mid \{d, e, f, \ldots\}\}$ raději přehledně $\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$ (píšeme prvky místo množin).

0 Nejjednodušší nadreálné číslo mezi všemi, a základ všech ostatních čísel je

$$0_{\mathbb{N}}\mathrm{o} \equiv \{\varnothing \mid \varnothing\}.$$

Toto číslo je triviálně nadreálné číslo a mezi jiným platí

$$(\forall x^L \in \varnothing)(\forall x^R \in \varnothing)\ x^L < x^R$$

1 Když máme $0_{\mathbb{N}}\mathrm{o}$, můžeme přistoupit k definici $1_{\mathbb{N}}\mathrm{o} \equiv \{0_{\mathbb{N}}\mathrm{o} \mid \varnothing\}$ a $-1 \equiv \{\varnothing \mid 0_{\mathbb{N}}\mathrm{o}\}$. Opět obě čísla splňují 1 triviálně díky vlastnostem prázdné množiny.

n Obecně můžeme vnořit $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{N}\mathrm{o}$ takto

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{N}}\mathrm{o} &\equiv \{\varnothing \mid \varnothing\} && (2)\\ (n+1)_{\mathbb{N}}\mathrm{o} &\equiv \{n_{\mathbb{N}}\mathrm{o} \mid \varnothing\} \qquad n \geq 0 && (3)\\ (n-1)_{\mathbb{N}}\mathrm{o} &\equiv \{\varnothing \mid n_{\mathbb{N}}\mathrm{o}\} \qquad n \leq 0. && (4) \end{aligned}$$

ω Nemusíme končit u konečných čísel, ale můžeme si představit i číslo

$$\omega \equiv \{0_{\mathbb{N}}\text{o}, 1_{\mathbb{N}}\text{o}, 2_{\mathbb{N}}\text{o}, \ldots \mid \varnothing\}.$$

Obecně ordinální čísla mohou být definována jako nadreálná čísla tvaru $\{L \mid \varnothing\}$ obvyklým způsobem.

$\mathbb{R}$ Reálná čísla mohou být ztotožněna s nadreálnými čísly x tak, že pro $-n < x < n$, kde n je nějaké přirozené číslo (tj. x je konečné) a

$$x = \left\{x - 1, x - \tfrac{1}{2}, x - \tfrac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; x + 1, x + \tfrac{1}{2}, x + \tfrac{1}{4}, \ldots\right\},$$

tj. x je ekvivalentní racionálnímu řezu, kde píšeme

$$x = y \Leftrightarrow x \leq y \;\wedge\; y \leq x.$$

Lemma 1.4. $(\forall x, y)\ x < y \Leftrightarrow \neg(x \geq y)$

J. Conway [ONAG 2001, p. 5] píše: Obecně budeme-li chtít dokázat nějakou vlastnost $P(x)$ pro všechna (nadreálná) čísla, budeme dokazovat induktivně dedukovat vlastnost $P(x)$ z pravdivosti $P(x^L)$ a $P(x^R)$. [...] Když budeme dokazovat vlastnost $P(x, y)$ dvou proměnných x, y, použijeme dvojnásobnou indukci, dedukovat $P(x, y)$ z pravdivosti $P(x^L, y)$, $P(x^R, y)$, $P(x, y^L)$ a z $P(x, y^R)$, a je-li nezbytné z $P(x^L, y^L)$, $P(x^L, y^R)$, $P(x^R, y^L)$ a z $P(x^R, y^R)$. [...]

[2hs03RMF actual indrekdefSN.tex, 12/03/15, 19:53]