# 1 Nestranné hry a Sprague-Grundyova teorie

Na rozdíl od klasické teorie her, teorie kombinatorických her vyžaduje dva hráče. Neformálně je hra charakterizována takto:

1. Hru hrají dva hráči, v tazích se pravidelně střídají.
2. Pravidla hry nepřipouštějí nějakou náhodu, tj. vylučujeme hry s kostkami, tahání karet atp.
3. O hře oba hráči mají úplnou a stejnou informaci; hráči znají všechny možné budoucí tahy a pokud je to nutné i předcházející tahy.
4. Hra po konečně mnoha tazích musí skončit. Hráč na řadě, který nemůže pravidly povolenými tahy táhnout, prohrál.

Poslední podmínka se nazývá *normální varianta hry*. Někdy se tato podmínka nahrazuje podmínkou, ve které poslední hráč prohrál. Takové variantě hry se říká *betlová varianta* (misère). V tomto příspěvku se budeme zabývat pouze normálními variantami. Budeme předpokládat, že oba hráči hrají optimálně a nedělají chyby. Pokud řekneme, že hráč ve hře vyhrál, budeme tím rozumět, že pro hráče existuje vyhrávající strategie. Vyhrávající strategie je bez ohledu na možné tahy protihráče.

## 1.1 Nestranné hry a hra Nim

Hra se nazývá *nestranná*, pokud v každé pozici oba hráči mají stejné možnosti tahů. Například hra dáma není nestranná, protože hráč může táhnout pouze kameny své barvy. Typickým příkladem nestranné hry je hra Nim.

Hra Nim se hraje takto: Na stole leží několik hromádek kamenů. Dva hráči se střídají, hráč na tahu si zvolí hromádku a z této hromádky odebere nenulový počet kamenů. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Tahem je odebrání kamene nebo kamenů. Pravidly může být stanoveno, že se může odebírat pouze stanovený počet kamenů. Pravidla se týkají obou hráčů.

Budeme-li mít $k$ hromádek s počty kamenů na jednotlivých hromádkách $n_1, n_2, \ldots, n_k$ a dovolenými tahy bude odebrání počtu, který bude určen množinou $S$, hru (tj. pozici) budeme psát $\textsc{Nim}[S; n_1, n_2, \ldots, n_k]$. Množinu $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ budeme nazývat počáteční pozicí. Hru si můžeme ilustrovat stromem hry (který může reprezentovat partii), analýzu...

Rozeberme si nejdříve hru s jednou hromádkou. Není-li na hromádce kámen, existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. První hráč nemůže odebrat nenulový počet kamenů a prohrál. Naopak v případě nenulového počtu kamenů na hromádce může první hráč odebrat všechny kameny a vyhraje. Analýza hry se dvěma hromádkami bude složitější: Pokud na hromádkách bude stejný počet kamenů, existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Pokud hráč odebere z jedné hromádky, druhý hráč odebere přesně stejný počet kamenů ze zbývající hromádky. Měl-li by první hráč nějakou strategii, potom druhý hráč ji může převzít (*strategy stealing*). V případě, že na dvou hromádkách je nestejný počet kamenů, první hráč svým tahem může hromádky dorovnat a zabezpečit si tak vítězství podle předcházejícího postupu.

Co se stane, budeme-li mít více hromádek? Třeba tři? Odpověď nalezl Ch. Bouton (1902):

1. Pro dvě nezáporná celá čísla $a$, $b$ definujeme *nim součet* $a \oplus b$ jako bitový XOR čísel $a$ a $b$, zapsaných ve dvojkové soustavě. Například $a = 23 = 16+4+2+1 = (10111)_2$ a $b = 10 = 8 + 2 = (1010)_2$, potom $a \oplus b = (11101)_2 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$.
2. Pokud nim součet všech hromádek je nulový, existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Pokud hodnota nim součtu je kladná, existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče. První hráč může zahrát tak, aby se dostal do pozice s nulovým nim součtem.

Není příliš těžké si rozmyslet, jak tato strategie funguje, a formální důkaz uvedeme později.

## 1.2 Axiómy nestranných her

Nyní se budeme zajímat o abstraktní vlastnosti struktury her. Budeme předpokládat, že máme nějakou pozici $P$ a známe všechny možné první tahy. Z pozice $P$ se můžeme jedním tahem dostat do nových pozic $P_1, P_2, P_3, \ldots$; $P_i \in P$. Tato úvaha nás přivede k následujícímu axiómatickému systému:

**Definice 1.1.** (Axiómy nestranných her)

1. Každá množina nestranných her je nestranná hra.
2. Hra po konečně mnoha tazích skončí, tj. neexistuje klesající nekonečný řetězec pozic $\ldots, G_3 \in G_2, G_2 \in G_1, G_1 \in G$.

Jinými slovy:

(a) Prázdná množina je nestranná hra.
(b) Jsou-li $G$ a $H$ nestranné hry, potom i $\{G, H\}$ je nestranná hra.
(c) Všechny *nestranné hry* jsou vytvořeny podle bodů (a) a (b).

Prvky nestranné hry se nazývají *možnosti tahů* a mohou být interpretovány jako pozice, které je možné dosáhnout jedním tahem. Druhý axióm zabezpečuje, že hra není nekonečná. Hra se svými možnostmi tahů (nové pozice) a možnosti tahů z těchto pozic, atd. vytvářejí všechny pozice hry. Pokud počet pozic je konečný, hru nazýváme *krátkou* (short).

Pro celé číslo $n \geq 0$, označíme $\bullet n$ hru Nim na jedné hromádce s $n$ kameny. Pozici budeme také zapisujeme Nim$[n]$ a čteme *nim en*.

Například jednu hromádku se třemi kameny označíme Nim[3]. Podle pravidel hry Nim možné tahy jsou do pozic Nim[2], Nim[1], Nim[0]. Z pozice Nim[2] jsou možné tahy do Nim[1] a Nim[0], z pozice Nim[1] je možný tah do Nim[0]. Z pozice Nim[0] není možný žádný (první) tah, tedy Nim[0]$= \varnothing$. Pozice Nim[3] je tedy $\{\bullet 2, \bullet 1, \bullet 0\}$.

**Úloha 1.2.** Nakreslete graf hry Nim[3] a hry $\{\{\bullet 2, \bullet 1\}, \bullet 0\}$.

Ekvivalentně každou krátkou nestrannou hru $G$ můžeme reprezentovat jako jednoduchý orientovaný graf bez kružnic (DAG), kde uzly budou odpovídat pozicím hry a hrany $(p, q)$ budou odpovídat možnému tahu z pozice $p$ do $q$. Kořen grafu se nazývá *počáteční pozicí.*

## 1.3 Kdo vyhraje v nestranné hře?

V každé nestranné hře může pouze vyhrát buď první, nebo druhý hráč. Pokud v dané pozici vyhraje první hráč, označíme tuto pozici jako $\mathcal{N}$ pozici (*n*ext, *n*ásledující hráč). V případě, že pozice je výhodná pro druhého hráče, označíme tuto pozici $\mathcal{P}$ (*p*revious, *p*ředcházející hráč).

Koncová pozice je $\mathcal{P}$. Z $\mathcal{P}$ pozice všechny tahy (jsou-li nějaké) vedou do $\mathcal{N}$ pozic. Z každé $\mathcal{N}$ pozice vede alespoň jeden tah do $\mathcal{P}$ pozice. (Pozice $\mathcal{N}$ hry v normální variantě nemůže být koncová!)

Pro krátké hry nám tato úvaha umožňuje v nestranné hře rekurzivně označit všechny možné pozice a zjistit tak vítěze prozkoumáním všech možností pomocí počítače hrubou silou. Zdálo by se, že problém je vyřešen označením všech pozic, ale tato metoda pro příliš velká čísla není příliš šikovná. Přesto ukážeme, že úlohy o hře Nim jsou docela snadno řešitelné jinými prostředky.

## 1.4 Disjunktní součet her Nim

Pro každé dvě nestranné hry $G$ a $H$ budeme definovat jejich *disjunktní součet* $G+H$ jako hru, ve které se hraje současně v obou hrách $G$ a $H$ (komponenty hry). Hráč na tahu si vybere jednu komponentu, v této komponentě zahraje a zbývající komponenta zůstane nezměněna. Svůj tah tedy zahraje podle pravidel pouze v jedné z nich.

Formálně: $G + H = \{G' + H; G' \in G\} \cup \{G + H'; H' \in H\}$

Překvapivě o poslední možnosti nemůžeme říct nic. Uvažme nejdříve případ dvou $\mathcal{N}$ pozic Nim[1] a Nim[1], jejich disjunktním součtem získáme Nim[1, 1], dvě hromádky s jedním kamenem. Podle našich předcházejících úvah zde existuje vyhrávající strategie pro II. hráče a hra je v $\mathcal{P}$ pozici. Budeme-li uvažovat dvě $\mathcal{N}$ pozice Nim[1] a Nim[2], jejich součtem je $\mathcal{N}$ pozice. (Stačí odebrat z druhé hromádky jeden kámen.) Jaké informace budeme potřebovat o hrách $G$ a $H$, abychom mohli určit vítěze ve hře $G+H$? Budeme potřebovat tzv. Grundyovu hodnotu hry. *Grundyova hodnota* nestranné hry se nazývá také někdy *Sprague-Grundyova hodnota*, nebo stručněji *nim hodnota.*

## 1.5 Grundyovy hodnoty a Grundyova věta

Budeme definovat hodnotu mex množiny $S$ nezáporných celých čísel jako nejmenší přirozené číslo, které není v množině $S$. Označení mex je zkratkou anglického *m*inimum *ex*cluded value. Jak uvidíme, smysl bude spočívat v tom, že množina $S$ bude odpovídat možným tahům ve hře a hodnota pozice bude nejmenší taková hodnota, kam již táhnout nemůžeme.

Grundyovy hodnoty $\mathcal{G}(G)$ krátké nestranné hry $G$ jsou definovány rekurzivně pomocí možných tahů ve hře. Například $\textsc{Nim}[0]$: $\mathcal{G}(\bullet 0) = \mathcal{G}(\varnothing) = 0$, pro $\textsc{Nim}[1]$: $\mathcal{G}(\bullet 1) = \mathcal{G}(\{\varnothing\}) = 1$ atd.

**Úloha 1.3.** Ukažte, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ \mathcal{G}(\bullet n) = n$.

**Věta 1.4.** *Krátká nestranná hra $G$ je v $\mathcal{N}$ pozici (existuje vyhrávající strategie pro I. hráče) právě tehdy, a jen tehdy, je-li její Grundyova hodnota $\mathcal{G}(G)$ kladná.*

*Důkaz*: Vynecháme. □

**Věta 1.5.** *(nim součet) Pro každé dvě krátké nestranné hry $G$ a $H$ platí: $\mathcal{G}(G+H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$, kde $\oplus$ je nim součet definovaný dříve.*

*Důkaz*: (Indukcí). Možnostmi ve hře $G+H$ je zahrát do $G'+H$ (kde $G' \in G$), nebo do $G+H'$ (kde $H' \in G$). Podle indukčního předpokladu, obě možnosti mají Grundyovu hodnotu, první $\mathcal{G}(G') \oplus \mathcal{G}(H)$, druhá $\mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H')$. Podle definice $\mathcal{G}(G+H)$ je mex množiny $S = \{\mathcal{G}(G') \oplus \mathcal{G}(H), \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H'); G' \in G, H' \in H\}$. Hodnota $\mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$ nepatří do $S$, $\mathcal{G}(G') \neq \mathcal{G}(G)$ a $\mathcal{G}(H') \neq \mathcal{G}(H)$, pro každou $G' \in G, H' \in H$. Nechť $x$ je nějaké nezáporné celé číslo, menší jak $\mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$. Musíme dokázat, že $x \in S$.

Označíme $[c]_k$ (pro $k = 0, 1, \ldots$) $k$tou cifru celého čísla $c$ ve dvojkové soustavě, tedy $c = \sum_{k=0}^{\infty} [c]_k 2^k$, kde $[c]_k \in \{0,1\}$.

Nechť $m$ je největším indexem, pro který je $[\mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H) \oplus x]_m = 1$. Protože $x < \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$, dostaneme $[\mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)]_m = 1$ a $[x]_m = 0$. Z toho plyne, že právě jedno z $[\mathcal{G}(G)]_m$ a $[\mathcal{G}(H)]_m$ je nula. Předpokládejme, že to je např. $[\mathcal{G}(G)]_m = 0$. Potom $[x \oplus \mathcal{G}(G)]_m = 0 < 1 = [\mathcal{G}(H)]_m$ a pro každé $k > m$ dostaneme $[x \oplus \mathcal{G}(G)]_k = [\mathcal{G}(H)]_k$. Tedy platí $x \oplus \mathcal{G}(G) < \mathcal{G}(H)$, což znamená, že nějaká $H' \in H$, pro kterou $\mathcal{G}(H') = x \oplus \mathcal{G}(G)$. Tedy nutně $x = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H')$ patří do $S$. □

Říkáme, že dvě krátké konečné nestranné hry $G$ a $H$ jsou ekvivalentní právě tehdy když pro libovolnou krátkou nestrannou hru $K$, jsou obě hry $G+K$ a $H+K$ obě současně $\mathcal{P}$ nebo současně $\mathcal{N}$ pozicemi.

Zkombinujeme-li přecházející dvě věty, obdržíme tzv. Grundyovu větu:

**Věta 1.6.** *Každá krátká nestranná hra je ekvivalentní nějaké hře* Nim *na jedné hromádce.*

[2hs03RMF actual impartial-l3.tex, 12/01/14, 09:14]