1 Nadreálná čísla

Úvod

Nadreálná čísla byla objevena vcelku nedávno, v 70. letech minulého století je objevil John H. Conway. Nadreálná čísla obsahují reálná čísla, nekonečně velká a nekonečně malá čísla.

Charakteristickým rysem nadreálných čísel je, že jsou součástí teorie kombinatorických her. Ve světě kombinatorických her slouží jako referenční model pro hodnoty her a pro vyhodnocování jejich pozic. Spojení nadreálných čísel a her umožňuje unikátní vlastnost – strategické důkazy. Dokázat nějakou větu (tvrzení) často znamená zahrát si nějakou hru. Důkazy týkající se nadreálných čísel jsou konstruktivní, i když používají princip silné matematické indukce.

Dalším důležitým rysem nadreálných čísel je, že při jejich konstrukci jsou současně vytvářeny ostatní číselné struktury. Standardně např. pro konstrukci reálných čísel je předpoklad existence racionálních čísel. Nadreálná čísla ale nepotřebují etablovat nějakou číselnou množinu. Stačí prázdná množina a pomocí ní se vytváří kumulativní hiearchie všech (nadreálných) čísel.

1.1 Kombinatorické hry

Kombinatorické hry hrají dva hráči, tradičně označování jako levý (bílý) a pravý (černý), kteří pomocí dovolených tahů mění své pozice ve hře. Hráči se v tazích střídají. Některé z těchto her jsou se hrají s kameny na šachovnici, některé hry jsou s tužkou a papírem a některé jsou čistě myšlenkové.

V centru pozornosti teorie je popis pozic, které mohou svými tahy dosáhnout levý a pravý hráč (levé a pravé možnosti tahů). Jinými slovy, matematický charakter pozice X je určen seznamem svých levých a pravých možností, které jsou sami pozicemi ve hře X. Pokud je X pozice, píšeme

$$\{\dots X^L \dots \mid \dots X^R \dots\},$$

kde X^L zastupuje typickou levou možnost a X^R pravou. Například je-li X pozice, ze které může levý zatáhnout do A, B nebo C a pravý zatáhnout do D nebo E, potom píšeme

$$\{A, B, C \mid D, E\}.$$

Hra končí, pokud hráč na tahu nemůže táhnout. Tento hráč se označuje jako prohrávající a jeho soupeř vyhrávající. Z tohoto hlediska například ve hře $X = \left\{X^L \,\middle|\, \right\}$ začne-li pravý, prohraje, a to z toho důvodu, že množina pravých tahů je prázdná (nemá pravidly povolený tah). Jak uvidíme později, když vyhraje levý, je hra kladná, vyhraje-li pravý je hra záporná.

Aby nám fungovaly důkazy, je třeba ještě předpokládat, že hra skončí po konečně mnoha krocích. Nutně tedy potřebujeme předpoklad, že žádná hra není nekonečná. Žádná hra nemůže obsahovat nekonečnou posloupnost pozic, které by byly možnostmi tahů předcházejících tahů.

Každá hra má jednu pozici, kterou nazýváme počáteční, pozici, ve které se začíná hra hrát. Tato pozice obsahuje úplnou informaci o celé hře. Má nějaké levé a pravé možnosti, které jsou pozicemi nových, jednodušších her. Poznamenejme, že pojmy pozice a hra jsou zaměnitelné. Proto každou hru ztotožňujeme se svojí počáteční pozicí. Naopak, každá pozice definované hry je hra, která se hraje z této pozice.

Definice 1.1. Nechť L, R jsou dva seznamy her, potom $X \equiv \{L \mid R\}$ je kombinatorická hra, pokud neobsahuje žádnou nekonečnou posloupnost her, z nichž by nějaké možnost byla jeho předchůdcem (posloupnost do sebe vnořených her je konečná). Hry v L jsou levé možnosti v X a R jsou pravé možnosti v X.

1.2 První hry

Definice kombinatorické hry je rekurzivní. Hra vyžaduje seznam levých a pravých možností, které musí být hrami a již předešle definovány. Jak tedy začít? Buď L nebo R (nebo obě) mohou obsahovat prázdný seznam her. Takto je definována první hra 0 (nula) a sice $0 \equiv \{|\}$, které nemá pro levého a pravého hráče žádný tah.

Budeme říkat, že hra 0 vznikla v 0tý den. Následující den, den 1, mohou být L, R obě prázdné nebo obsahovat 0. Tak ve dne 1 vznikne $1 \equiv \{0 \mid\}$, $-1 \equiv \{\mid 0\}$ a $* \equiv \{0 \mid 0\}$. Jak uvidíme později, 1 a -1 budou čísla, ale $*$ ne.

Nejjednodušší hrou je hra 0. Je to koncová pozice každé hry. V této hře žádný z hráčů nemůže zahrát. V této hře existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.

Ve hře $1 \equiv \{0 \mid\}$ je jeden tah pro levého hráče do hry nula, kde hra skončí. Pravý nemůže táhnout (prohrál). Zahrajte si hru -1.

Ve hře $* \equiv \{0 \mid 0\}$ existuje vyhrávající strategie pro I. hráče.

Z těchto příkladů usoudíme, že

hra 0	...	existuje vyhrávající strategie pro II. hráče
hra 1	...	existuje vyhrávající strategie pro levého hráče
hra -1	...	existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče
hra $*$	...	existuje vyhrávající strategie pro I. hráče

a nezáleží na tom, který z hráčů začíná. Každá kombinatorická hra patří jedné třídě.

Dále (dne 2) vznikají například hry $2 \equiv \{0, 1 \mid\}$, $1/2 \equiv \{0 \mid 1\}$, $\uparrow \equiv \{0 \mid *\}$, $\downarrow \equiv \{* \mid 0\}$ a další. Obecně, každá hra je definována určitý den a má levou a pravou možnost ze starších her, které byly již vytvořeny v přecházejících dnech.

1.3 Důkaz infinite descent

Předpoklad, že hra neobsahuje nekonečný do sebe vnořený řetězec jednodušších her, umožňuje vyslovit tvar důkazu indukcí, která se nazývá infinite descent. Nechť $P(X)$ je nějaké tvrzení, které chceme dokázat, tj. je pravdivé pro každé X. Potom stačí dokázat: Platí-li $P(Y)$ pro všechny možnosti Y v X, potom $P(X)$ platí.

Protože pokud vlastnost $P(X)$ neplatí pro nějakou hru X_0, potom věta také neplatí pro nějaké X_1 (možnost v X_0), možnost X_2 v X_1, ..., což vede na nekonečnou množinu do sebe vnořených her, což není možné, tedy vlastnost $P(X)$ platí pro všechny hry X.

Úlohy 1.2.
1. Množinu nazýváme „hezkou“, právě tehdy, a jen tehdy, když všechny její vlastní podmnožiny jsou hezké. Které množiny jsou hezké? Nápověda: Je prázdná množina hezká?
2. Hru nazýváme hezkou, právě tehdy, a jen tehdy, když všechny její možnosti jsou hezké. Které hry jsou hezké?
3. Dokažte obvyklou matematickou indukci pomocí infinite descent.
4. Může se použít infinite descent k důkazu transfinitní indukce?

Příklady her

Mnoho společenských her je založeno na náhodě a tak nejsou kombinatorickými hrami. Ovšem mnoho zajímavých a těžkých her je takových, které mohou být analyzovány pomocí Conwayovy teorie.

1. **Dominové dláždění** Dva hráči, Levý a Pravý, střídavě kladou kameny domina (2×1 čtvereček) na hrací plochu, Levý svisle, Pravý vodorovně, jednotlivé kostky se nemohou překrývat. Hrací plocha je nejčastěji mřížka z $n \times n$ čtverečků. Kdo nemůže táhnout, prohrál.
2. **Col** Dva hráči střídavě barví vrcholy grafu (Levý černě, Pravý bíle), přitom není možno obarvit sousední vrcholy stejnou barvou. Kdo nemá tah, prohrál.
3. **Snort** Jako Col, ale zakázáno je obarvit sousední vrcholy různou barvou.
4. **Nim** Dva hráči střídavě odebírají sirky z několika hromádek. V jednom tahu je možno odebrat z libovolné hromádky libovolný počet sirek. (Existuje mnoho variant, kde jsou povoleny jiné tahy.) Kdo nemá tah, prohrál.
5. **Hra bez zlaťáku** Hrací plán tvoří vodorovný pás čtverečků, na některých políčkách jsou mince (žádná z nich není zlaťák). Jeden tah spočívá v posunu libovolné mince o libovolný počet políček doprava, není ovšem možno přeskočit jinou minci, navíc na každém políčku může být nejvýše jedna mince. Kdo nemá tah, prohrál.
6. **Hra se zlaťákem** Hraje se podobně jako minulá hra, jednou z mincí je však zlaťák. Na políčku nejvíce vpravo je měšec, do kterého se vejde libovolný počet mincí. Když jeden hráč vloží do měšce zlaťák, hra končí a druhý hráč si měšec vezme (čili vyhrál).
7. **Pěšcová hra** Hraje se na několika sloupcích šachovnice, na každém je jeden bílý a jeden černý pěšec. Jeden hráč tahá bílými pěšci, druhý černými, tah spočívá v posunu pěšce v rámci sloupce o libovolný počet polí, není možno přeskočit pěšce soupeřova. Kdo nemá tah, prohrál.

8. **Výhonky** Na začátku je na papíře n puntíků. Jeden tah spočívá ve spojení dvou puntíků čarou a nakreslení puntíku někam na nakreslenou čáru. Přitom se žádné dvě čáry nesmějí křížit a z žádného puntíku nesmí vést více než tři čáry. Hráči se pravidelně střídají v tazích, kdo nemá tah, prohrál.
9. **Dopravní hra** Hraje se na orientovaném grafu – plánku měst a jednosměrných silnic mezi nimi, v některých městech jsou auta (libovolný počet v jednom městě). Jeden tah spočívá v posunu libovolného auta po libovolné silnici vedoucí z města, v němž se auto nalézalo. Kdo nemá tah (všechna auta jsou v městě, z něhož nevede cesta ven), prohrál.

Kombinatorické hry jsou hrami pozic, do kterých oba hráči L i R mají množiny možností nebo tahů. Kombinatorické hry jsou vytvářeny ze dne na den pomocí prázdné množiny. Hry jsou čistě strategické a hry se nemůže hrát do nekonečna (hra skončí).

1.4 Uspořádání

Conway vytváří uspořádání pro hry pomocí konceptu preference tahů (lepší tah, výhoda). Je-li $X \geq Y$ v tomto uspořádání znamená, že hra X nabízí nějakou výhodu pro levého hráče spíše, než hra Y. (Hra X je nejméně tak dobrá, jako hra Y.) Přirozeně pravý hráč preferuje naopak hru Y než hru X.

Definice 1.3. Jsou-li X a Y hry, říkáme, že levý preferuje X nad Y (nebo pravý preferuje Y nad X) a píše se $X \geq Y$, pokud neplatí $Y^L \geq X$ nebo $Y \geq X^R$, kde Y^L reprezentuje libovolnou levou možnost v Y a X^R reprezentuje libovolnou pravou možnost v X.

Uspořádání Xa Y je definováno rekurzivně porovnáním X a možností v Y a porovnáním Y a možnostmi v X. Hry jsou vytvářeny ze dne na den. Pokud je vytvořena nová hra X, její uspořádání (porovnání s dříve vytvořenými hrami) je určeno jako část porovnání již známých dříve vytvořených her.

Všechny otázky jsou řešeny převodem na prvky prázdné množiny (neexistují), protože budeme-li hrát hru dostatečně dlouho, jedna z množin bude prázdná. Je důležité si uvědomit, že jakékoliv tvrzení o prázdné množině je pravdivé. Zejména tvrzení obsahující obecný kvantifikátor jsou u prázdné množiny pravdivé.

$X \leq Y \Leftrightarrow Y \geq X$	hra X je nejméně tak dobrá pro pravého hráče jako hra Y
$X = Y \Leftrightarrow X \leq Y \wedge Y \leq X$	X je ekvivalentní s Y
$X \parallel Y \Leftrightarrow$ neplatí $X \geq$ Y ani $Y \geq X$	hry X a Y jsou fazy.

Rovnost her je definováno jako relace. Lze jednoduše dokázat, že rovnost je ekvivalence, tedy relace reflexivní, tranzitivní a antisymetrická. Tak jako jinde v matematice, můžeme dělat rozdíl mezi ekvivalencí a totožností. Dvě hry X a Y jsou identické (a píšeme $X \equiv Y$), pokud obě mají přesně stejné levé a pravé množiny (množinová rovnost). Ekvivalentní hry nemusí být nutně identické, jak za chvíli také uvidíme. Ekvivalentní hry mají ten samý výsledek i hodnoty.

Relaci $\parallel$ potřebujeme, protože uspořádání her nesplňuje vlastnost trichotomie. Uspořádání není lineární. Relace $\parallel$ znamená, že hry jsou neporovnatelné vzhledem k uspořádání.

Úloha 1.4.
1. Dokažte následující vztahy:
   (a) $0 \geq 0$
   (b) $1 \geq 0$
   (c) $0 \geq -1$
   (d) $2 \geq 1 \geq 1/2 \geq 0$.
   Například $1 \geq -1$, podle definice $-1^L \ngeq 0 \wedge -1 \ngeq 1^R$. Protože -1^L ani 1^R neexistují, je tvrzení pravdivé.
2. Dokažte, že následující tvrzení nejsou pravdivá:
   (a) $0 \geq 1$
   (b) $0 \geq 1/2$
   (c) $0 \geq *$
   (d) $* \geq 0$.
   Například neplatí $-1 \geq 1$, protože existuje $1^L = 0$, $0 \geq 1$ a existuje $-1^R = 0$ tak, že $1 \geq 0$.
3. Ověřte platnost rovností:
   (a) $1 = \{0, 1 \mid\}$
   (b) $2 = \{1 \mid\} = \{-1, 1 \mid\} = \{0, -1, 1 \mid\}$.
4. Dokažte následující vztahy:
   (a) $1 \geq *$
   (b) $-1 \leq *$
   (c) $* \parallel 0$.

Ekvivalence (rovnost) je relace typu ekvivalence. Dokážeme, že relace $\leq$ je tranzitivní.

Věta 1.5. *Relace $\leq$ je tranzitivní.*

Důkaz: (Infinite descent). Předpokládejme $X \geq Y$ a $Y \geq Z$. To znamená, že neplatí

$$Y^L \geq X \vee Y \geq X^R \vee Z^L \geq Y \vee Z \geq Y^R.$$

Naším cílem je dokázat $X \geq Z$, což znamená, že neplatí

$$Z^L \geq X \vee Z \geq X^R.$$

Nejdříve dokážeme první tvrzení.

To, že máme dokázat tvrzení o Z^L nám napoví, že máme použít indukci. To znamená, že budeme předpokládat, že podobné tvrzení platí pro všechny dříve vytvořené (jednodušší) hry. Proto předpokládejme, že věta platí pro všechny možnosti hry Z, speciálně pro Z^L. Nyní použijeme navíc důkaz sporem. Sporem předpokládejme, že platí $Z^L \geq X$ pro nějakou možnost Z^L. To ale znamená, že díky $X \geq Y$, platí i $Z^L \geq Y$, což je v rozporu s naším předpokladem. Tedy $Z^L \geq X$ neplatí.

Analogicky se dokáže druhá část důkazu, že ani $Z \geq X^R$ neplatí. □

Úlohy 1.6.
1. Dokončete předcházející důkaz tím, že také vyloučíte možnost $Z \geq X^R$. (Indukcí a sporem)

2. Pro libovolnou hru X dokažte:
   (a) nerovnost $X \geq X^R$ není platná
   (b) nerovnost $X^L \geq X$ není platná
   (c) $X \geq X$.

   Poznámka: Všechny tři tvrzení dokazujte současně pomocí infinite descent.
   Příklad: Dokážeme neplatnost $X \geq X^R$. Budeme předpokládat, že tvrzení platí pro všechny jednodušší hry, možnosti v X. Neplatnost $X \geq X^R$ znamená, že existuje $X^{RL} \geq X$ nebo existuje X^R tak, že $X^R \geq X^R$. Poslední tvrzení díky indukci předpokládáme.
3. Dokažte $X = X$.
4. Dokažte, že $=$ je ekvivalence.

Uspořádání <

Následující věta spojuje uspořádání a herní strategii ve hře.

Věta 1.7 (Klasifikační věta)**.** *Nechť X je libovolná hra, potom:*

1. *$X > 0$, X je kladná, což znamená, že je $X \geq 0$ a rovnost nenastane, tj. existuje vyhrávající strategie pro levého hráče.*
2. *$X < 0$, X je záporná, což znamená, že je $X \leq 0$ a rovnost nenastane, tj. existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče.*
3. *$X = 0$, X je nulová, což znamená, že existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.*
4. *$X \parallel 0$, X je fazy, což znamená, že existuje vyhrávající strategie pro I. hráče.*

Důkaz:

□

Důsledek 1.8. *Každá hra X má buď vyhrávající strategii pro 1. hráče, nebo druhého, nebo vyhrávající strategii pro levého, popřípadě pravého hráče.*

Úlohy 1.9. 1. Dokončete důkaz klasifikační věty.
2. Věta o dominujících prvcích: Nechť $X = \{A, B, C, \dots \mid D, E, \dots\}$ a předpokládejme, že $A \leq B$ a $D \geq E$. Potom $X = \{B, C, \dots \mid E, \dots\}$. Dokažte!
3. Zahrajte si hru:
   (a) Hackenbush
   (b) COL
   (c) SNORT
   (d) Domino.

Kombinatorické hry mají uspořádání, ve kterém $X \geq Y$ znamená, že levý hráč raději zahraje v X než do Y. Pomocí tohoto uspořádání mohou být hry klasifikovány na kladné, záporné, nulové a fazy.

1.5 Aritmetika her

Sčítání

Sčítání her znamená hrát hry souběžně. Hráč zahraje v jedné komponentě a druhá (popř. ostatní) zůstanou nezměněny.

Definice 1.10. Nechť X, Y jsou hry. Potom součet $X + Y$ je

$$X + Y \equiv \left\{ X^L + Y, X + Y^L \;\middle|\; X^R + Y, X + Y^R \right\}.$$

Možnosti ve hře $X + Y$ popisují intuitivní roli hrát hry paralelně. Hráč na tahu si může vybrat jednu komponentu (ne obě) a v ní provede svůj tah. Levá část obsahuje myšlenku, že levý hráč zahraje v jedné komponentě. Součet her skončí, jako obvykle, pokud hráč na tahu nemůže táhnout (nemá pravidly povolený tah).

Důkazy hraním her

Klasifikační věta vytváří důkazovou metodu, která je unikátní v celé Conwayově teorii. Rovnosti a nerovnosti mohou být dokazovány často velmi jednoduše zahráním příslušné hry

Poznamenejme, že při dokazování rovnosti lze převést rovnost s nulou a dokázat, že v této hře existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.

Úlohy 1.11.
1. Dokažte:
   (a) $0 + 0 \equiv 0$
   (b) $1 + 0 \equiv 1$
   (c) $* + 0 \equiv *$
   (d) $1 + 1 \equiv 2$.
2. Následující tvrzení dokazujte hraním příslušných her:
   (a) $2 + (-1) \geq 0$
   (b) $2 + (-1) + (-1) = 0$
   (c) $* + * = 0$
   (d) $1/2 + 1/2 + (-1) = 0$.

   Příklad: Dokážeme $1+(-1) = 0$. Protože $1 \equiv \{0 \mid\}$ a $-1 \equiv \{\mid 0\}$, ve hře $\{0 \mid\}+\{\mid 0\}$ může první hráč zahrát v jedné komponentě a druhý hráč dotáhne. Proto ve hře $1 + (-1)$ existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.
3. Dokažte $X + 0 \equiv X$ pro libovolnou hru X.
4. Pokud Y je nulová hra, potom hra $X + Y$ má stejný výsledek jako hra X. K důkazu použijte hraní her.
5. Ve hře Nim součet her je hraní her na disjunktních hromádkách.

Vlastnosti součtu

Následující tvrzení popisují intuitivní vlastnosti sčítání her (komutativnost, asociativnost a skládání her)

Věta 1.12. *Pro všechny hry X, Y, Z platí*

1. $X + Y = Y + X$
2. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z.$

Věta 1.13. *Pro všechny hry X, Y platí:* $X \geq 0 \wedge Y \geq 0 \Rightarrow X + Y \geq 0.$

Úloha 1.14. Dokažte předcházející dvě tvrzení. Podotkněme, že důkaz tvrzení 1.13 lze provést dvěma způsoby: Jeden pomocí infinite descent a druhý přímý důkaz založený na hře ve hře $X + Y$. Nalezněte oba důkazy!

Opačná hra

Hra se nazývá nestrannou, pokud oba hráči mají na výběr v každé pozici stejné možnosti tahů. Jinak se hra nazývá partyzánskou (barevnou). Hra Nim je například nestranná, na rozdíl od hry Domino, která je partyzánská.

Opačnou hru dostaneme vyměněním rolí levého a pravého hráče.

Definice 1.15. Pro libovolnou hru X, opačná hra $-X$ ke hře X je tato hra:

$$-X \equiv \left\{-X^R \mid -X^L\right\}.$$

Věta 1.16. *Pro libovolné hry X, Y platí:*

1. $-(X + Y) = (-X) + (-Y)$
2. $-(-X) = X$
3. $X \geq Y \Leftrightarrow -Y \geq -X.$

Věta 1.17. *Pro libovolnou hru X, Y platí:* $X \geq Y \Leftrightarrow X - Y \geq 0.$

Věta 1.18. *Pro libovolnou hru X platí* $X + (-X) = 0.$

Úlohy 1.19.
1. Dokažte předcházející věty! Často můžete nalézt více důkazů: zahráním si příslušných her, infinite descent, nebo použitím předcházejících dokázaných vět.
2. Dokažte $X = Y \wedge W = Z \Rightarrow X + W = Y + Z.$
3. Dokažte, že nestranné hry jsou sami k sobě opačné. Udělejte z toho závěr, že v nestranných hrách existuje vyhrávající strategie pro I. hráče nebo existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.
4. Definujte $*1 \equiv \{0 \mid 0\}$, $*2 \equiv \{0, *1 \mid 0, *1\}$, $*3 \equiv \{0, *1, *2 \mid 0, *1, *2\}$, $\ldots$, obecně

   $$*n \equiv \{0, *1, \ldots, *(n-1) \mid 0, *1, \ldots, *(n-1)\}.$$

   Dokažte, že součtem dvou her tohoto tvaru je opět hra tohoto tvaru.

Kombinatorické hry mají relaci uspořádání a operaci sčítání, které vyhovují běžným aritmetickým operacím sčítání a relaci uspořádání. Uspořádání je tranzitivní, reflexivní a antisymetrické. Sčítání je komutativní, asociativní, obsahují nulu (nulový prvek vůči sčítání) a všechny hry mají svůj opačný prvek. Na druhou stranu existují hry, které nejsou porovnatelné (uspořádání není lineární) a tedy se jedná o uspořádání částečné.

1.6 Nadreálná čísla

Nadreálná čísla vznikají jako speciální hry. Conway napodobuje konstrukci reálných čísel pomocí řezů. Řez rozděluje racionální čísla na dvě množiny, jedna obsahuje čísla větší (než dané číslo) a druhá menší. Nadreálná čísla zobecňují tuto ideu, každé nadreálné číslo je řezem již dříve vytvořených menších a větších čísel.

Definice 1.20. Nadreálné číslo x je hra x, pro kterou

1. všechny možnosti x jsou čísla
2. neplatí $x^L \geq x^R$.

Slovy: Žádná levá možnost hry x není větší ani rovna žádné pravé možnosti hry x.

Definice předpokládá, že nějaká nadreálná čísla jsou již vytvořena. To ale není problém. Stejně jako v případě her, každé číslo je definováno určitý den. Rozdíl mezi hrami a čísly je v podmínkách, že levé a pravé jsou čísla a žádná levá není větší ani rovna žádné pravé možnosti.

Důkazy o nadreálných číslech se opět dějí prostřednictvím infinite descent, tak jako důkazy o hrách.

Dne nula se narodí nadreálné číslo $0 \equiv \{|\}$. Obě části definice 1.20 jsou splněny triviálně. Jinými příklady čísel narozených v několika následujících dnech, jsou: $1 \equiv \{0\,|\}, 2 \equiv \{0,1\,|\}, 3 \equiv \{0,1,2\,|\}, \ldots\; -1 \equiv \{|\,0\}, -2 \equiv \{|\,0,-1\}, -3 \equiv \{0,1,2 \mid 0,-1,-2\}, \ldots$ $1/2 \equiv \{0 \mid 1\}, 1/4 \equiv \{0 \mid 1/2\}, 3/4 \equiv \{1/2 \mid 1\}, \ldots$

Obecně celá čísla, kladná i záporná jsou definována jako:

$$\begin{aligned} n &\equiv \{0,1,2,\ldots,(n-1)\,|\} \\ -n &\equiv \{|\,0,-1,-2,\ldots,-(n-1)\}. \end{aligned}$$

Tato čísla vznikají $n$tého dne. Je celkem jednoduché si rozmyslet, že nadreálná čísla a jejich sčítání je „to samé“ jako obvyklé sčítání s celými čísly.

Věta 1.21.
1. *Nechť x je nadreálné číslo, potom i $-x$ je nadreálné číslo.*
2. *Nechť x, y jsou nadreálná čísla, potom i $x+y$ je nadreálné číslo.*
3. *Nechť x, y jsou nadreálná čísla, potom buď $x \geq y$ nebo $x \leq y$.*

Nadreálná čísla jsou uzavřena vůči operaci $+, -$. Dále z věty plyne, že uspořádání je trichotomické a tedy čísla jsou i lineárně uspořádána.

Úlohy 1.22.
1. Ověřte, že $2+1=3$, $2+2=4$, $2+3=5$, atd.
2. Dokažte trichotomii nadreálných čísel.
3. Pro libovolné nadreálné číslo x platí $x^L < x < x^R$. Dokažte!
4. Nalezněte všechna čísla narozená dne 0, 1, 2 a 3. Nalezněte pravidlo, která čísla vznikají? Pravidlo dokažte!

Násobení nadreálných čísel

Na první pohled se může zdát, že násobení nadreálných čísel je komplikované. Uvažme, že jsme násobení nedefinovali pro hry. Nadreálné násobení se definuje pouze pro nadreálná čísla.

K zavedení násobení připomeňme, jak vzniká sčítání. Nechť x, y jsou čísla. Nechť $x + y$ je nadreálné číslo, potom levá možnost tohoto součtu musí být menší než $x + y$ (a pravá část ostře menší). To by znamenalo, že $x^L + y$ a $x + y^L$ musí být levé možnosti součtu $x + y$. Podobně můžeme diskutovat i pravou stranu a dostaneme:

$$x + y \equiv \left\{ x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R \right\}.$$

Tato definice je opět rekurzivní. Podotkněme, že analogická definice pro násobení neplatí, tj. neplatí $xy \equiv \left\{ x^L y, xy^L \mid x^R y, xy^R \right\}$. Stačí ukázat, $x \cdot 0 = x$ a ne 0, jak bychom chtěli. Budeme hledat definici v induktivním tvaru.

Ke správné definici násobení se dostaneme například touto úvahou: Uvažujme $x - x^L > 0$ a $y - y^L > 0$. Budeme chtít, aby platilo $(x - x^L)(y - y^L) > 0$, tj. $xy > x^L y + xy^L - x^L y^L$ a analogicky v ostatních případech.

Definice 1.23. Nechť x, y jsou čísla. Potom

$$x \cdot y \equiv \left\{ x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \mid x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L \right\}.$$

Úloha 1.24. Podle definice vypočtěte $0 \cdot 1$, $1 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 1/2$ a podobně.

Vlastnosti násobení

Doposud nevíme, zda xy je také číslo. Součin je jistě hra.

Věta 1.25. *Nechť x, y a z jsou nadreálná čísla.*

1. $x \cdot 0 \equiv 0$
2. $x \cdot 1 \equiv x$
3. $xy \equiv yx$
4. $(-x)y \equiv x(-y) \equiv -(xy)$
5. $(x + y)z = xz + yz$
6. $(xy)z = x(yz)$.

Uvědomíme-li si předcházející větu, můžeme vyslovit i následující větu:

Věta 1.26. *Nechť x, y jsou nadreálná čísla, potom $x \cdot y$ je nadreálné číslo. Je-li navíc $x > 0$ a $y > 0$, potom $xy > 0$.*

Úlohy 1.27.
1. Dokažte větu 1.25.
2. Dokažte větu 1.26.

1.7 Nadreálná osa

Která čísla jsou nadreálná a kde leží? Začneme větou, která nám pomůže identifikovat nová čísla tak, jak se narodí.

Nechť $x \equiv \{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$, kde $a, b, c, d, e, f, \ldots$ jsou čísla a všechna čísla z levé části jsou ostře menší než čísla vpravo. Potom x bude číslem. A zeptejme se, které? Conway takovému číslu z říká nejjednodušší – nejdříve narozené mezi čísly $a, b, c, d, e, f, \ldots$

Věta 1.28 (Věta o nejstarším prvku)**.** *Nechť $x \equiv \left\{x^L \mid x^R\right\}$ je číslo. Nechť z je číslo mezi x^L a x^R, ale žádná možnost čísla z tuto vlastnost nemá. Potom $x = z$.*

Příklad 1.29. Například $\{-1 \mid 2\} = 0$, protože 0 je nejjednodušší mezi -1 a 2. Pár příkladů:
den 0

$$0 = \{\mid\}$$

den 1

$$\begin{aligned} 1 &= \{0 \mid\} \\ -1 &= \{\mid 0\} \end{aligned}$$

den 2

$$\begin{aligned} 0 &= \{-1 \mid 1\} \text{ nový tvar } 0 \\ 1/2 &= \{0 \mid 1\} = \{-1, 0 \mid 1\} \\ -1/2 &= \{-1 \mid 0\} = \{-1 \mid 0, 1\} \\ 2 &= \{1 \mid\} = \{0, 1 \mid\} = \{-1, 0, 1 \mid\} = \{-1, 1 \mid\} \\ -2 &= \{\mid -1\} \text{ atd.} \end{aligned}$$

Například $\{-1, 0 \mid 1\}$ musí být číslo mezi 0 a 1. Nejstarším prvkem je 1/2. Proto $\{-1, 0 \mid 1\} = 1/2$.
$1/2+1/2 \equiv \{1/2 \mid 1 + 1/2\}$. Nejstarší číslo mezi 1/2 a 1+1/2 je jedna, proto $1/2+1/2 = 1$.

Třetího dne se opět narodí opět několik nových čísel, které mají alternativní zápisy. Podle věty o zjednodušování vznikají čísla mezi dvěma staršími a nová čísla na číselné ose vlevo a vpravo. Tedy 3. dne získáváme:

$$\begin{aligned} 3 &= \{2 \mid\} = \{1, 2 \mid\} = \{0, 1, 2 \mid\} = \cdots \\ 3/2 &= \{1 \mid 2\} = \{0, 1 \mid 2\} = \cdots \\ 3/4 &= \{1/2 \mid 1\} = \cdots \\ 1/4 &= \{0 \mid 1/2\} = \cdots \\ -1/4 &= \{-1 * 2 \mid 0\} = \cdots \\ 3/4 &= \{-1 \mid -1/2\} = \cdots \\ -3 &= \{\mid -2\} = \cdots \end{aligned}$$

Úlohy 1.30. 1. Dokažte větu o zjednodušování. Nápověda: Nejdříve dokažte $x \geq z$.

2. Ukažte, že v seznamu jsou všechna nová čísla, která vznikla 3. dne.
3. Uvažte, že jsme nová čísla označili dobře, tj. například:

$$\begin{aligned} 3 &= 2+1 \\ 2(3/2) &= 3 \\ 3/4+3/4 &= 3/2 \\ 1/4+1/4 &= 1/2, \ldots \end{aligned}$$

4. Každý konečný den vznikne pouze jedno číslo mezi dvěma staršími čísly.
5. Dokažte, že v konečný den vznikají pouze dyadická čísla.

Den ω

Po všech konečných dnech přichází následující den. Nazývá se ω. Tohoto dne vzniká mnoho dalších čísel. Například číslo

$$a = \{ \text{ všechna starší čísla } y; 3y < 1 \mid \text{ všechna starší čísla } y; 3y > 1\}.$$

Některé prvky $a = \{1/4, 5/16, 21/64, \ldots \mid 1/2, 3/8, \ldots\}$. Podle věty o zjednodušování to znamená, že $a + a + a = 1$ a tedy $a = 1/3$.

Podobným způsobem získáme i další reálná čísla, která se doposud nenarodila, racionální a iracionální, včetně π, $\sqrt{2}$, φ a třeba e. Všechny vzniknou v den omega. Největší číslo narozené v den ω je samo ω.

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots \mid\},$$

které je samo větší, než všechna předcházející čísla (dříve vytvořená). Také vznikne číslo

$$-\omega = \{\mid 0, -1, -2, -3, \ldots\},$$

a nejmenší kladné číslo dne ω je číslo:

$$1/\omega = \{0 \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\}.$$

Tato čísla jsou nekonečně velká a malá v rámci nadreálných čísel.

Tvorba čísel nekončí ve dne ω, ale pokračuje dále, např. následujícího dne vznikne i:

$$\begin{aligned} \omega + 1 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega \mid\} \\ & \{0, 1, 2, 3, \ldots \mid \omega\}, \end{aligned}$$

a podobně i v následujících dnech...

Úlohy 1.31. 1. Dokažte $a + a + a = 1$.

2. Dokažte, že $\sqrt{2}$ vznikne ve dne ω.

3. Dokažte:

$$\begin{aligned}\{0,1,2,3,\ldots,\omega\mid\} &= \omega+1\\ \{0,1,2,3,\ldots\mid\omega\} &= \omega-1.\end{aligned}$$

4. Dokažte:

$$\{0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1\mid\} = \omega+2.$$

5. Dokažte:

$$\{0,1,2,3,\ldots,\mid\omega,\omega-1\} = \omega-2.$$

   Obecně $\{0,1,2,3,\ldots,\mid\omega,\omega-1,\omega-2,\ldots,\omega-(n-1)\} = \omega-n$.
6. Který den vznikne číslo $z = \{0,1,2,3,\ldots,\mid\omega,\omega-1,\omega-2,\ldots,\}$? Ukažte, že $z = \omega/2$.

Nadreálná čísla zahrnují reálná čísla a také obsahují nekonečně velká a malá čísla. Tato čísla jsou budována po krocích, ze dne na den.

1.8 Další nadreálná čísla

Budeme se věnovat inverzním prvkům.

Lemma 1.32. *Každé kladné nadreálné číslo x má tvar, ve kterém nula leží vlevo a všechny další levé prvky jsou kladné.*

Definice 1.33. Nechť x je kladné nadreálné číslo. Nechť x je ve tvaru předcházejícího lemmatu. Potom inverzním (převráceným) prvkem k prvku x je

$$y = \left\{0, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} \;\middle|\; \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}\right\}$$

Tak jako i ostatní definice v teorii her i tato definice je rekurzivní. Předpokládá, že známe reciproké hodnoty dříve vytvořených číslech. Indukce začne od x, které musí mít nejméně jednu kladnou levou a pravou část. To znamená, že x nesmí být nula (nula nemá inverzní prvky).

Dále je tu přítomna druhá indukce a to přes nově vytvořené číslo y. Tato druhá indukce začíná předpokladem, že 0 je levou částí čísla y.

Například: Nechť $x = 3 = \{0,1,2\mid\}$. A vypočteme $y = 1/3$. Vzhledem k definici dostaneme $y = \{0,\ldots\mid\ldots\}$, y^L použije pro výpočet y^R, tedy $y = \left\{0,\ldots \;\middle|\; \frac{1+(2-3)\cdot 0}{2},\ldots\right\} = \{0,\ldots\mid 1/2,\ldots\}$. Nyní máme dokonce y^R, které použijeme pro výpočet y^L, tedy

$$y = \left\{0, \frac{1+(2-3)\frac{1}{2}}{2},\ldots \;\middle|\; 1/2,\ldots\right\} = \{0,1/4,\ldots\mid 1/2,\ldots\}.$$

Budeme-li takto pokračovat, získáme konečně

$$y = \{0, 1/4, 5/16, 21/64, \ldots \mid 1/2, 3/8, 11/32, \ldots\}.$$

Tento proces nikdy neskončí, protože y bude mít nekonečně čísel vlevo i vpravo, získáváme lepší a lepší aproximaci čísla 1/3.

Úlohy 1.34. 1. Dokažte předcházející lemma.
2. Spočtěte ještě několik dalších prvků čísla 1/3.
3. Použitím definice $1/x$, spočítejte několik prvních omezení čísel pro:
   (a) $2 = \{0, 1 \mid\}$
   (b) $5 = \{0, 1, 2, 3, 4 \mid\}$
   (c) $1/2 = \{0 \mid 1\}$.

Nadreálná čísla tvoří těleso

Následující věta odpovídá na otázku vlastností převráceného prvku.

Věta 1.35. *Nechť x je kladné nadreálné číslo. Předpokládejme, že y je převrácený prvek k prvku x. Potom*

1. $xy^L < xy^R$
2. *y je číslo*
3. $(xy)^L < 1 < (xy)^R$
4. *xy=1.*

Nadreálná čísla jsou lineárně uspořádané komutativní těleso, které obsahuje reálná čísla, ale také infinitesimální a infinitní čísla.

Odmocnina

Podobný tvar má odmocnina. Nechť x je kladné nadreálné číslo, odmocninu definujeme takto:

$$\sqrt{x} = \left\{ \sqrt{x^L}, \frac{x + y^L y^R}{y^L + y^R} \;\middle|\; \sqrt{x^R}, \frac{x + y^L y^{L'}}{y^L + y^{L'}}, \frac{x + y^R y^{R'}}{y^R + y^{R'}} \right\}$$

Úlohy 1.36. 1. Vypočtěte několik prvních levých a pravých částí $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.
2. Dokažte, že $\sqrt{x}$ definuje nadreálné číslo.
3. Dokažte, že $\sqrt{x}$ je druhá odmocnina x.

Doporučená literatura

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[CGT] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)

[2hs03RMF actual henle.tex, 27/06/14, 17:39]