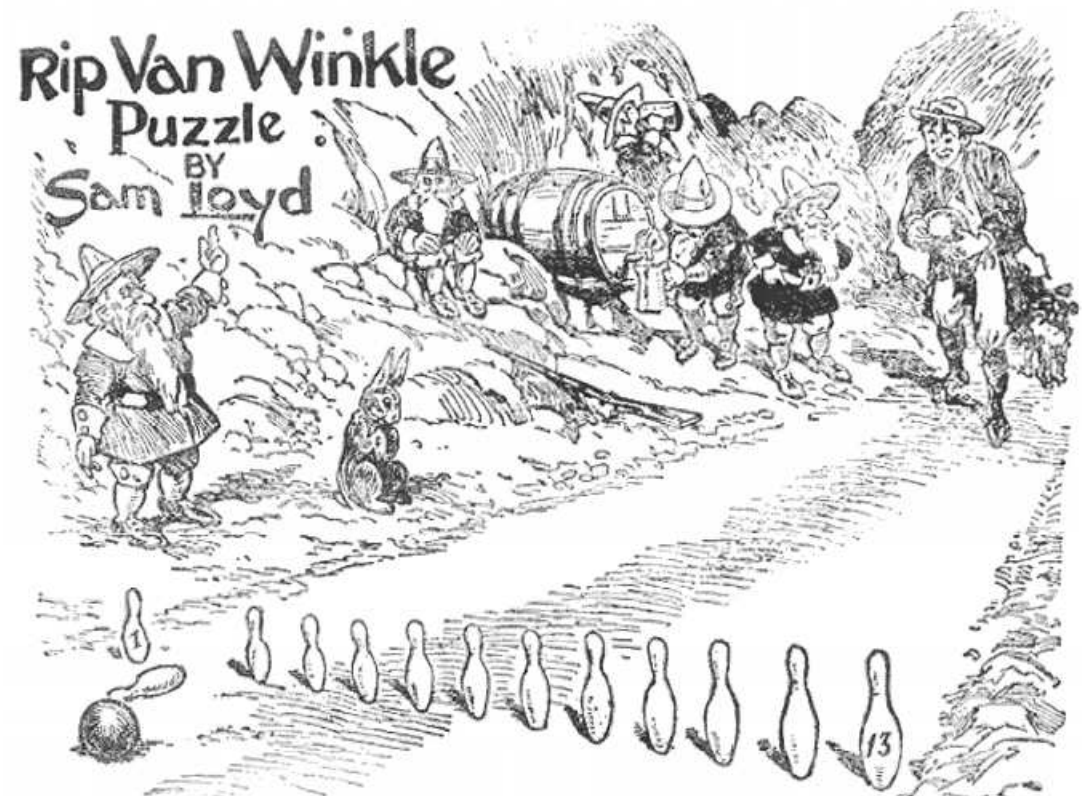
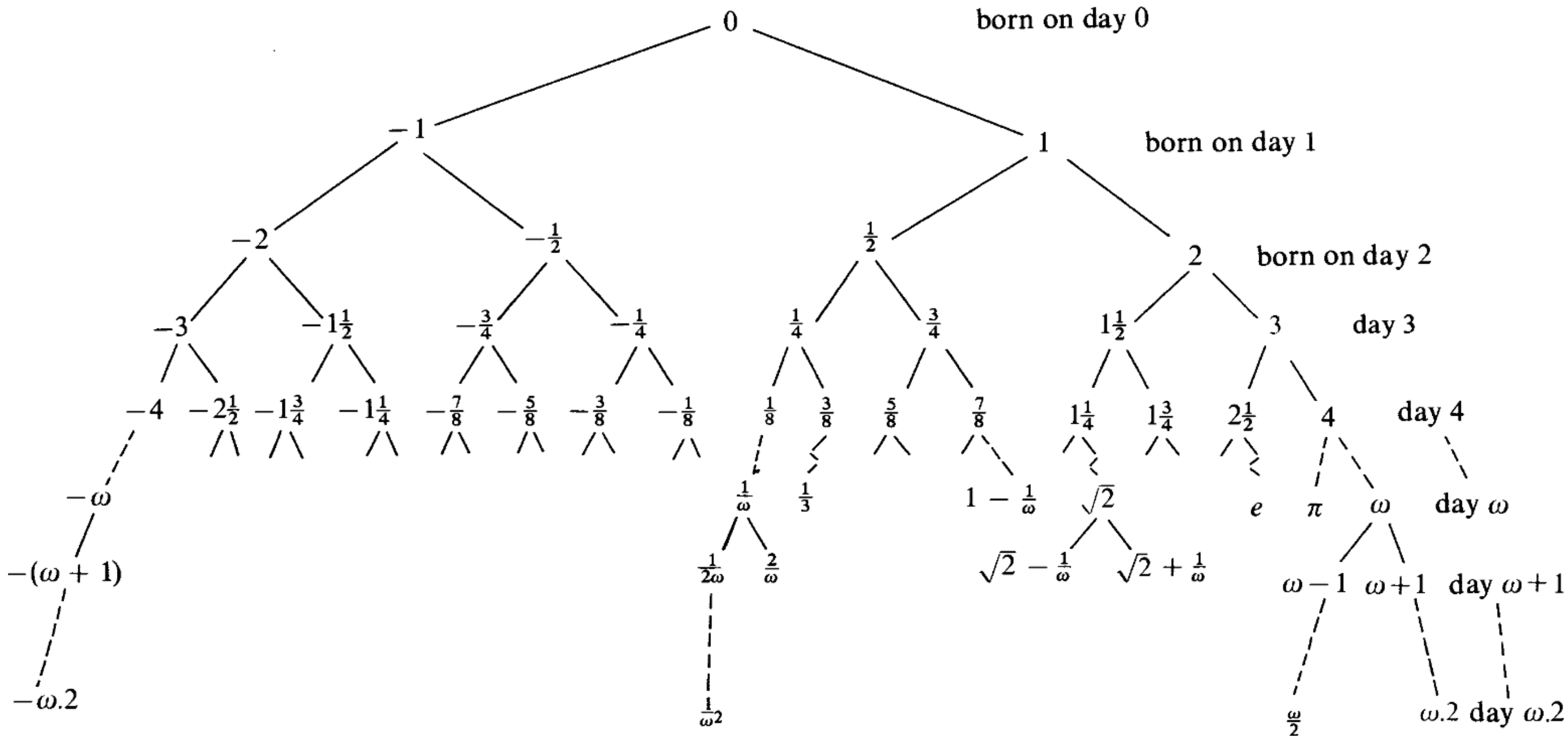
Nadreálná čísla a kombinatorické hry v příkladech

14. listopadu 2014



Hraje se jako na obrázku,[1] hráč na tahu položí buď jednu nebo dvě sousedící figurky. Hráči se střídají a vyhraje hráč, který položí poslední figurku. Který hráč vyhraje?

[1] Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks, and Conundrums, 1914
http://www.mathpuzzle.com/loyd/cop232-233.html



0
born on day 0
−1
1
born on day 1
−2
−½
½
2
born on day 2
−3
−1½
−¾
−¼
¼
¾
1½
3
day 3
−4
−2½
−1¾
−1¼
−⅞
−⅝
−⅜
−⅛
⅛
⅜
⅝
⅞
1¼
1¾
2½
4
day 4
−ω
1/ω
1/3
1 − 1/ω
√2
e
π
ω
day ω
−(ω + 1)
1/2ω
2/ω
√2 − 1/ω
√2 + 1/ω
ω − 1
ω + 1
day ω + 1
−ω.2
1/ω²
ω/2
ω.2
day ω.2

Úmluvy

Množinou přirozených čísel rozumíme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Prázdná množina $\{\} = \varnothing$ neobsahuje žádný prvek. Množina $\{\varnothing\}$ má jeden prvek.

1 Nadreálná čísla

1. *Konstrukce:* Nechť L a R jsou množinami nadreálných čísel a nechť žádný prvek množiny L není $\geq$ žádnému prvku množiny R. Potom $\{L \mid R\}$ je nadreálné číslo. Všechna nadreálná čísla jsou vytvořena podle tohoto pravidla.
2. *Způsoby zápisu:* Pro nadreálné číslo $x \equiv \{L \mid R\}$ označujeme typický prvek levé množiny L jako x^L, typický prvek pravé množiny R jako x^R, a samotné číslo x píšeme jako $\{x^L \mid x^R\}$. Budeme-li mít například $\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$, rozumíme tím číslo $\{L \mid R\}$, kde $a, b, c, \ldots$ jsou typickými prvky L a $d, e, f, \ldots$ analogicky jsou typickými prvky R.
3. *Uspořádání:* Říkáme $x \geq y$, právě tehdy a jen tehdy, když pro žádný prvek x^R neplatí $x^R \leq y$ a pro žádný prvek y^L neplatí $x \leq y^L$.
   Říkáme $x \not\leq y$, právě tehdy a jen tehdy, když neplatí $x \leq y$.
   Říkáme $x < y$, právě tehdy a jen tehdy, když $x \leq y$ a současně $y \not\leq x$.
   Říkáme $x \leq y$, právě tehdy a jen tehdy, když $y \geq x$.
   Říkáme $x > y$, právě tehdy a jen tehdy, když $y < x$.
4. *Rovnost:* Říkáme $x = y$, právě tehdy a jen tehdy, když $x \leq y$ a současně $y \leq x$.
5. *Sčítání, odčítání, ...*

$$
\begin{aligned}
x + y &\equiv \left\{x^L + y,\ x + y^L \,\middle|\, x^R + y,\ x + y^R\right\}. \\
-x &\equiv \left\{-x^R \,\middle|\, -x^L\right\}. \\
x - y &\equiv x + (-y). \\
xy &\equiv \left\{x^L y + x y^L - x^L y^L,\ x^R y + x y^R - x^R y^R \,\middle|\, x^L y + x y^R - x^L y^R,\ x^R y + x y^L - x^R y^L\right\}.
\end{aligned}
$$

1.1 Vlastnosti oboru nadreálných čísel

Úloha 1.1. První příklad nadreálného čísla. Na počátku neznáme žádné nadreálné číslo. Přesto ale známe množinu nadreálných čísel, a to sice prázdnou. Můžeme tedy vytvořit naše první číslo pomocí definice nadreálného čísla, a to

$$0 \equiv \{\mid\} \quad (\text{kde } L = R = \varnothing)$$

Toto číslo jsme označili 0, protože bude mít roli nulového prvku. Pomocí tohoto prvku můžeme vytvořit další nadreálné číslo:

$$1 \equiv \{0 \mid\} \quad (\text{kde } L = \{0\}, R = \varnothing)$$

1. Přesvědčete se, že právě definovaná čísla 0 a 1 jsou skutečně nadreálná čísla (podle definice, včetně předpokladu).

2. Přesvědčete se, že platí $0 \leq 1$.
3. Pomocí již zkonstruovaných čísel můžeme vytvořit i tyto tři objekty:

$$\{0 \mid\}, \quad \{\mid 0\}, \quad \{0 \mid 0\}.$$

   Které z nich jsou čísla?
4. Uspořádejte všechna již vytvořená čísla a navrhněte pro ně označení, viz 3.
5. Vytvořte několik dalších čísel, přidejte jim označení a uspořádejte je.

Úloha 1.2. První výpočty s nadreálnými čísly.

1. Přesvědčte se, že podle definice platí $0 + 0 = 0$.
2. Přesvědčte se, že podle definice také platí $0 + 1 = 1$.
3. Vypočtěte $(-1) + 1$ a výsledek porovnejte s 0.
4. Na posledním příkladě 3 vysvětlete, proč je důležitá zvláštní definice pro rovnost nadreálných čísel. Co je totožnost čísel?
5. Určete podle definice $1+1$, určete $(1+1)+1$, atd. Výsledky nás přivedou na označení 2, 3, atd.

Úloha 1.3. Pravidlo o redukci. Platí následující lemma: Bez změny hodnoty čísla, můžeme z levé množiny odebrat všechny prvky, až na největší číslo, a z pravé množiny můžeme odebrat všechna větší čísla až na nejmenší.

1. Přesvědčte se o platnosti lemmatu na následujícím příkladě:

$$\{0, 1, 2 \mid 6, 7, 11\} = \{0, 2 \mid 6\} = \{2 \mid 6\}.$$

2. Použijte pravidlo pro další výpočty.

Úloha 1.4. Den narození čísel. Den narození $\delta(x)$ nadreálného čísla je opět nadreálné číslo, které je definováno takto:

$$\delta(x) \equiv \left\{\delta(x^L), \delta(x^R) \;\middle|\; \right\}.$$

Budeme také říkat, že číslo x se narodilo dne $\delta(x)$.

1. Přesvědčete se, že číslo 0 se narodilo ve dne 0.
2. Vypočítejte den narození několika dalších čísel.
3. Dokažte, že den narození je číslo.
4. Kdy bylo vytvořeno číslo $\{-1 \mid 1\}$? Porovnejte svůj výsledek s úlohou 1.1.

Pozorování: Den narození záleží na tvaru čísla. Dvě stejná čísla mohou být vytvořena v jiný den. Záleží na definičním tvaru čísla. Zkuste nalézt hodnotu a den narození čísla $\{\mid 1\}$.

Úloha 1.5. Hodnota čísla. Platí následující lemma: Číslo $x = \left\{x^L \;\middle|\; x^R\right\}$ je *nejjednodušší* — což znamená *nejdříve narozené* — číslo, které je větší jak všechny levé části x^L a menší než všechny x^R.

1. Přesvědčete se, že lemma platí pro všechna dosud vytvořená čísla.
2. Nalezněte hodnoty těchto čísel:

$$\{1 \mid\}, \qquad \{2 \mid\}, \qquad \{-3, 1 \mid 2\}, \qquad \left\{0 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\right\}, \qquad \left\{-1 \;\middle|\; -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Úloha 1.6. Doplnění označování. Definujeme $\frac{1}{2} \equiv \{0 \mid 1\}$. V této úloze se přesvědčíme, že číslo má rozumné označení.

1. Vypočtěte $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ přesně podle definice.
2. Dokažte, že výsledek je roven $1 = \{0 \mid\}$.

Pozorování: Je lepší delší výpočty přenechat počítači. Seznamte se s CGSuite.

Úloha 1.7. Nekonečně velká nadreálná čísla. Definujeme nadreálné číslo $\omega \equiv \{0, 1, 2, \dots \mid\}$.

1. Proč ω je nadreálné číslo?
2. Dokažte: Pro každá přirozené číslo n platí $n < \omega$. V tomto smyslu je číslo ω nekonečně veliké!
3. Spočtěte $\omega + 1$.
4. Vypočítejte také $\omega - 1$.
5. Ukažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí $n < \omega - 1$. To znamená, že nadreálné číslo $\omega - 1$ je ještě větší než libovolné přirozené číslo, ale menší než ω.

Úloha 1.8. Nekonečně malá čísla. Budeme definovat nadreálné číslo $\varepsilon \equiv \left\{0 \;\middle|\; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$.

1. Dokažte, že ε je skutečně nadreálné číslo.
2. Dokažte, že ε je větší než 0, ale menší než libovolné kladné reálné číslo. Možná budete muset použít dvojkovou soustavu.
3. Uvažujme třeba $\omega + \varepsilon$, $\omega \cdot \varepsilon$, ε^2, $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\varepsilon}$. Kde tyto hodnoty leží na nadreálné přímce?

Úloha 1.9. Indukční princip pro nadreálná čísla. Budeme-li chtít dokázat, že pro všechna nadreálná čísla $x = \left\{x^L \;\middle|\; x^R\right\}$ platí nějaké tvrzení T, stačí dokázat toto tvrzení z předpokladu pro všechna x^L a všechna x^R platí tvrzení T, platí tvrzení T i pro x. Tento princip se nazývá indukce a umožňuje dokazovat obecné věty pro nadreálná čísla.

Na první pohled se může zdát, že předcházející indukční princip je definován kruhem. Dokázat ale nějakou vlastnost T, znamená předpokládat, že tato vlastnost platí pro jednodušší, dříve vytvořená, čísla. Všimněte si, že nepoužíváme tzv. první krok indukce. Pro pochopení principu slouží tato úloha.

1. Jaký indukční předpoklad využijete při důkazu nějaké vlastnosti T týkající se $x = 0 = \{\mid\}$?
2. Pokud porovnáte tento princip indukce s obvyklým principem matematické indukce přirozených čísel, nepotřebujete ověřovat tvrzení prvního kroku. Proč je přesto všechno v pořádku?

Úloha 1.10. Příklady na indukci.

1. Dokažte, že pro libovolná nadreálná čísla x: $x + 0 = x$.
2. Dokažte, že pro libovolná nadreálná čísla x: $0 + x = x$.
3. Dokažte, že pro libovolná nadreálná čísla x: $x \cdot 0 = 0$.
4. Dokažte, že pro libovolná nadreálná čísla x: $x \geq x$.
5. Dokažte, že pro libovolná nadreálná čísla x a y: $x + y = y + x$.

Úloha 1.11. Nadreálná čísla netvoří množinu. V jistém smyslu nadreálná čísla netvoří množinu, protože obsahují i nekonečná ordinální čísla. Nadreálná čísla tvoří vlastní třídu.

Ukažte, že budeme-li uvažovat množinu nadreálných čísel, vždy můžeme vytvořit ještě větší množinu.

Úloha 1.12. Ordinální součet. V této úloze poznáme novou operaci, kterou využijeme při zkoumání vlastností hry Hackenbush (viz 2.8). Ordinálním součtem 1 a libovolného nadreálného čísla x je definováno

$$1 : x \equiv \left\{0,\ 1 : x^L \,\middle|\, 1 : x^R\right\}.$$

Nebudeme zde diskutovat obecnou definici ordinálního součtu pro dvě nadreálná čísla.

1. Zkontrolujte, že platí: $1 : 0 = 1, \quad 1 : 1 = 2, \quad 1 : 2 = 3.$
2. Kolik je $1 : (-1)$?
3. Kolik je $1 : \frac{1}{2}$?
4. Kolik je $1 : \omega$?
5. Ukažte, že pro každé číslo x je $1 : x$ kladné (tj. > 0).
6. Ukažte, že funkce $1 : x$ je po částech lineární

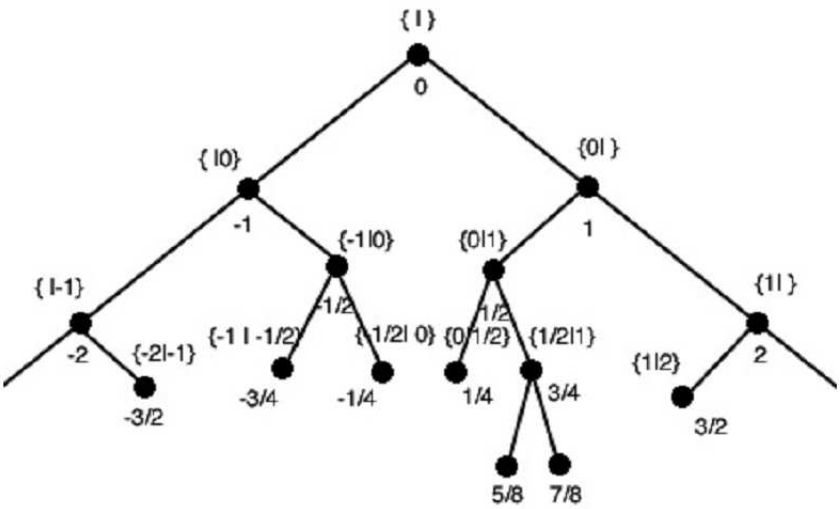
$$\frac{x+1}{1}, \quad \frac{x+2}{2}, \quad \frac{x+3}{4}, \quad \frac{x+4}{8}, \quad \frac{x+5}{16}, \quad \dots,$$

Úloha 1.13. Plus minus rozvoj nadreálných čísel. Každé nadreálné číslo může být znázorněno na rodokmenu všech nadreálných čísel. Použijeme zápis: pro pohyb do prava použijeme $+$ a opačně pro pohyb vlevo znak $-$ (viz obrázek na straně 2).

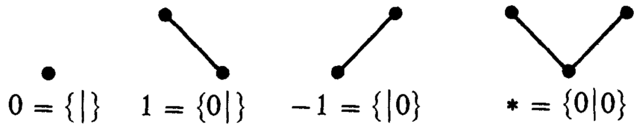
1. Objasněte:

$$3 = {+}{+}{+}, \quad \tfrac{3}{4} = {+}{-}{+}.$$

2. Jak označíte 0?
3. Napište plus minus rozvoj $\frac{1}{3}$?
4. Jak vypadá rozvoj ω? A pro $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$?
5. Určete rozvoj i pro $\omega - 1$. Na jaký problém jste narazili?
6. Určete také rozvoj $\frac{\omega}{2}$.
7. Podaří se vám nalézt spojitost s binárním rozvojem, viz též 2.12?



2 Kombinatorické hry



Až doposud jsme se věnovali nadreálným číslům, jejich konstrukci a jak se s nimi počítá. Nyní se budeme věnovat kombinatorickým hrám dvou hráčů, tradičně označovaní jako Levý a pRavý hráč, kteří se v tazích střídají. Ve hře se nevyskytuje žádný prvek náhody (nehází se třeba kostkou), hra je s úplnou informací a s nulovým součtem. To znamená, že ve hře nejsou pro některého hráče nějaké skryté informace, všechny možné tahy jsou známy oběma hráčům. Ve hře, hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohraje a jeho soupeř vyhraje. Například hra Mlýn splňuje tyto požadavky, ale karetní hry kanasta nebo mariáš nejsou kombinatorickými hrami.

Situaci ve hře můžeme dobře popsat možnými pozicemi hráčů po prvním tahu. Hry jsou zobecněním nadreálných čísel a mnoho závěrů platí i pro hry. Například i indukční princip (viz 1.9).

1. Hru hrají dva hráči, tradičně označovaní levý a pravý hráč.
2. Hra obsahuje konečně mnoho pozic a jednu počáteční pozici.
3. Pravidla hry stanovují možné tahy obou hráčů ze všech pozic do nových pozic. Tahům také říkáme možnosti.
4. Hráči levý a pravý se v tazích střídají, hráč na tahu se nemůže svého tahu vzdát.
5. V normální variantě hráč na tahu, který nemůže podle pravidel zahrát, prohrál. Hra musí skončit vítězstvím jednoho hráče a prohrou druhého hráče.
6. Pravidla hry zaručují, že hra skončí po konečně mnoha tazích, protože jeden z hráčů nemůže táhnout.
7. Oba hráči mají úplnou informaci, tj. především všechny možné tahy své i soupeře.
8. Žádnou roli ve hře nehraje náhoda (hrací kostky, karty apod.).

Konstrukce her. Nechť L a R jsou dvě množiny her, potom dvojice $\{L \mid R\}$ je také hra. Všechny hry jsou vytvořeny tímto způsobem.

Levou množinou L rozumíme množinu takových tahů, které může levý hráč dosáhnout jedním tahem, je-li na tahu. Analogicky pravou množinou R rozumíme množinu nových pozic, dosažitelných ze současné pozice jedním tahem, je-li pravý hráč na tahu. Možné tahy nazýváme možnosti. Levé hráče často budeme označovat pouze slovem levý a pravého hráče pravý.

Nejjednodušší hru dvou hráčů již známe: *Hra nula*: Hráč na tahu okamžitě prohrává, nemá k dispozici žádný tah. V této hře nemá žádný z hráčů na výběr žádný tah, protože obě množiny L, R jsou prázdné. Tuto pozici budeme také zapisovat jako hru $\{|\} = 0$.

Druhý obrázek nahoře ukazuje jednoduché hry. Hrami jsou kořenové uzlové grafy, hrany označují tahy a uzly pozice. Tahy levého kreslíme doleva nahoru a tahy pravého do prava vzhůru. Na druhém obrázku druhá hra zleva je hra, ve které levý hráč může táhnout do hry 0, kde hra skončí, pravý hráč nemá na výběr žádný pravý tah. Příslušná pravá množina je tudíž prázdná. Levá množina obsahuje pouze prvek nula. Tuto herní situaci budeme zapisovat $\{0 \mid\} = 1$.

Ve hře $\{\mid 0\} = -1$ je $L = \varnothing$ a pravá množina $\{0\}$. Levý hráč nemůže táhnout (jeho množina možných prvních tahů je prázdná) a pravý hráč může táhnout do hry 0.

Hry 0, 1 a -1 jsou také nadreálná čísla. Následující hra $*$ je příkladem vlastní hry, tedy hry, která není nadreálné číslo. V této hře vyhraje první hráč (ten, který začíná), protože táhne do hry 0. Budeme psát $* \equiv \{0 \mid 0\}$.

Každé nadreálné číslo je buď > 0, $= 0$ nebo < 0. Hra $*$ nejde v tomto smyslu porovnat s nulou. Říkáme, že hra $*$ je fazy s hrou nula, píšeme $\parallel 0$. Obecně pro libovolnou hru G platí:

$G > 0$ právě tehdy a jen tehdy, když existuje vyhrávající strategie pro levého hráče.

$G < 0$ právě tehdy a jen tehdy, když existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče.

$G = 0$ právě tehdy a jen tehdy, když existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče.

$G \parallel 0$ právě tehdy a jen tehdy, když existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče.

Výrok *existuje vyhrávající strategie* vyjadřuje možnost vyhrát, bez ohledu na možné tahy soupeře! To nevylučuje situaci, že při hraní hry nějaký hráč nebude hrát optimálně (hráč udělá chybu). Budeme předpokládat, že hráči nedělají chyby. Potom tedy budeme také říkat, že hráč vyhraje.

Úloha 2.1. Vyhrávající strategie pro jednoduché hry. Uvědomte si bez použití předcházejícího pravidla, že ve hře

1. jedna 1 existuje vyhrávající strategie pro levého hráče, ať už pravý hraje jakkoliv.
2. ve hře minus jedna -1 existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče, a nezáleží na tazích levého.
3. ve hře $*$ existuje vyhrávající strategie pro začínajícího hráče.
4. ve hře 0 existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče (ten, který nezačíná).

Úloha 2.2. Fazy hra. Dokažte, že $* \parallel 0$ tak, že neplatí $* \leq 0$ ani $* \geq 0$.

Úloha 2.3. Vyhrávající strategie obecné hry. V této úloze se budeme chtít pochopit proč jsou jen 4 typy her G s výsledkem > 0, < 0, $= 0$, resp. $\parallel 0$, tj. vyhraje levý, pravý, druhý resp. první. To uděláme indukcí, tj. podobné vlastnosti budeme předpokládat i pro dříve vytvořené hry G^L a G^R.

1. Potvrďte následující výroky:

   $G > 0$ právě, když žádné $G^R \leq 0$ a $0 \leq$ nějakému G^L.

   $G < 0$ právě, když $0 \leq$ žádné G^L a nějakému $G^R \leq 0$.

   $G = 0$ právě, když $0 \leq$ každé G^L a každé $G^R \leq 0$.

   $G \parallel 0$ zbývající možnost.

2. Jsou možné pouze čtyři výsledky.

Úloha 2.4. Interpretace opačného prvku.

1. Je-li hra $G = \{G^L \mid G^R\}$, potom píšeme $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$. Je to taková hra, která vznikne, pokud vyměníme tahy levého a pravého hráče. Ověřte!
2. Vysvětlete, proč opačná hra ke hře fazy je také fazy?

Úloha 2.5. Interpretace sčítání.

1. Objasněte: Budeme-li mít dvě hry $G = \{G^L \mid G^R\}$ a $H = \{H^L \mid H^R\}$, potom jejich součtem je hra $G + H = \{G^L + H,\ G + H^L \mid G^R + H,\ G + H^R\}$, která popisuje tuto situaci: Hry G a H leží na stole vedle sebe. Začínající hráč si vybere jednu z těchto her a v ní udělá svůj tah. Druhá hra zůstane beze změny. Druhý hráč si opět vybere z těchto dvou her a v ní udělá svůj tah, atd. do doby, kdy jsou obě hry vyčerpány, ve hře nebude tah. Potom tento hráč prohrál a jeho soupeř vyhrál.
2. Ilustrujte na $1 + 1$.
3. Ilustrujte na $1 + (-1)$ a objasněte, proč je tato hra nulovou.
4. Ilustrujte na hře $* + *$ a objasněte, proč je tato hra nulovou.

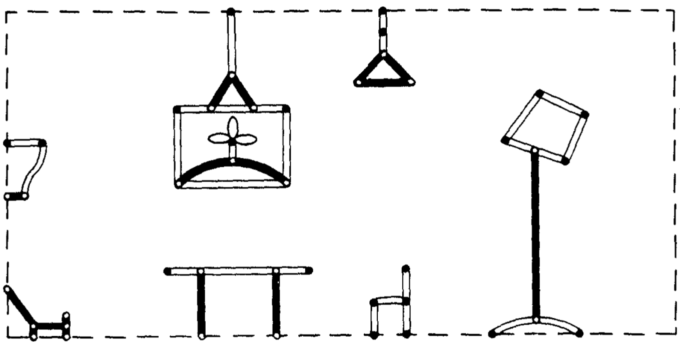
Úloha 2.6. Interpretace rozdílu $G - G$.

1. Co můžete říct o dvou šachových partií, když v jedné budete hrát bílými a v druhé černými figurkami. Hry se budou hrát současně…
2. Dokažte, že pro každou hru G, hra $G - G = G + (-G)$ má hodnotu nula. To znamená, že ve hře vyhraje druhý.

Úloha 2.7. Hra Domino . Hra se hraje na šachovnici, levý hráč a pravý hráč střídavě pokládají na šachovnici kostky domina. Levý vertikálně, pravý horizontálně. Kostky se pokládají tak, že zaujmou dvě sousední pole. Kostky se nesmějí překrývat. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

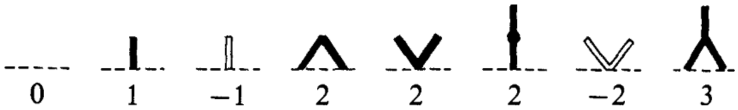
1. Přesvědčte se, že hráč na tahu, kde je volné pouze jedno volné pole, je nulová hra. Tato hra se může označit 0. Naleznete také jiné nulové hry?
2. Budou-li pouze tři horizontální pole šachovnice volné, jaké tahy hráči mají na výběr? Přesvědčte se, že tato hra má hodnotu $1 = \{0 \mid\}$.
3. Pokuste se nalézt pozice, které mají hodnotu: $-2, -1, \frac{1}{2}, 1, *, \{1 \mid -1\}$.
4. Namodelujte si také součet her.
5. Spočítejte hodnoty dalších jednodušších her.
6. Uvažujme pozici $G = \{G^L \mid G^R\}$. Jak sestrojíme hru $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$? (viz příklad 2.4.)

Úloha 2.8. Hackenbush. Hra Hackenbush se nemusí hrát na šachovnici, ani čtverečkovaném papíru, ale hraje se na libovolném grafu. Conway uvádí tento příklad:



Ve hře jsou tyčinky, které jsou spojeny se základnou. Tyčinky jsou dvou barev; bíLé, které odebírá pravý hráč a čeRné, které odebírá levý hráč. S každou tyčinkou se odstraní i tyčinky, které nesouvisí se základnou. Hráči se v tazích střídají. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál.

1. Překontrolujte hodnoty následujících her:



2. Nalezněte hodnoty následujících pozic:

3. Jak se projeví opačná hra? (viz 2.4)
4. Jednoduché pravidlo pro výpočet hodnot hry na libovolném grafu není známé. Pro stromy ale můžeme taková pravidla vyslovit… Jaká hodnota je přiřazena obrázku:

Úloha 2.9. Hackenbush na nekonečných grafech.

1. Zkuste vypočítat hodnoty nekonečných „hadů“! A také nějakých periodických hadů.

2.1 Nim čísla

Úloha 2.10. Mex. Nechť S je konečná množina přirozených čísel, potom $\operatorname{mex} S$ je *nejmenší* přirozené číslo, které není v S (minimum excludant).

1. Překontrolujte správnost následujících příkladů:

$$\operatorname{mex}\{0,1,4,7\} = 2, \quad \operatorname{mex}\{1,4,7\} = 0, \quad \operatorname{mex}\varnothing = 0.$$

2. Vypočtěte mex nějaké jiné podmnožiny přirozených čísel.

Úloha 2.11. Sčítání nim čísel. Z hlediska teorie množin je sčítání nimů (nim čísel) definováno rekurzivně takto:

$$n \oplus m \equiv \operatorname{mex}\Big(\{n' \oplus m \,|\, n' < n\} \cup \{n \oplus m' \,|\, m' < m\}\Big).$$

Budeme-li chtít vypočítat hodnotu $n \oplus m$, musíme znát všechny hodnoty $n' \oplus m$ pro menší hodnoty $n' < n$ a také hodnoty $n \oplus m'$ pro všechny menší čísla $m' < m$. Výslednou hodnotu pak dostaneme pomocí mex.

1. Rozšiřte Cayleho tabulku sčítání nimů.
2. Dokažte obvyklou matematickou indukcí platnost pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ platí: $0 \oplus n = n$.
3. Dokažte: $n \oplus n = 0$. Podaří se vám nalézt další zákonitosti tabulky?

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	0	1	2						
1		0	3						
2									
3							5		
4			6						
5									
6									
7						2			
$\vdots$									

Úloha 2.12. Interpretace nim sčítání pomocí dvojkové soustavy. V desítkové soustavě používáme cifry 0 až 9. Hodnotu čísla potom získáme pomocí rozvoje mocnin čísla 10 a jejich koeficientů: jednotky, desítky, stovky, tisíce,… Dvojková soustava je mnohem jednodušší. Obsahuje pouze dvě cifry 0 a 1 a mocniny dvojky: jednotky, dvojky, čtyřky, osmičky etc. V případě, že používáme oba systémy, čísla s dvojkovou soustavou píšeme s dolním indexem 2.

1. Příklady čísel ve dvojkové soustavě:

$$3 = 11_2, \qquad 6 = 110_2, \qquad 10 = 1010_2, \qquad 16 = 10000_2.$$

2. Jak se sčítají čísla ve dvojkové soustavě (písemný součet)? Vypočtěte několik příkladů.
3. Nim součet je podobný součtu ve dvojkové soustavě, až na to, že nedochází k přesunu do vyšších řádů. Tato operace se nazývá také jako bitový XOR, a odpovídá logické spojce vylučovací nebo, nebo dokonce je to operace ve vektorovém prostoru dvou prvků. Tento součet je také definován jako součet modulo 2.
4. Dopočítejte několik hodnot v Cayleho tabulce.

Úloha 2.13. Hra Nim. Hra Nim se hraje na hromádkách kamenů. Před hráči jsou hromádky a oba hráči mají ta samá pravidla. Hráč na tahu si vybere jednu hromádku a z ní odebere libovolný (nenulový) počet hracích kamenů. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál. Hry, ve kterých v každé pozici oba hráči mají naprosto stejné možnosti tahů, se nazývají nestranné (impartial games).

1. Přesvědčete se, že hra na jedné hromádce s jedním kamenem má hodnotu $* = \{0 \mid 0\}$. Který z hráčů má vyhrávající strategii?
2. V případě dvou kamenů na jedné hromádce získáme postavení, které odpovídá hodnotě: $\{0, * \mid 0, *\}$.
3. Obecně jak popíšete situaci, ve které je jedna homádka s n kameny?
4. Máme právě dvě hromádky, hodnoty hromádek označíme G a H. Jak popíšete situaci, bude-li se hrát na těchto hromádkách?

Hra Nim je v teorii nestranných her důležitá, protože je univerálním modelem všech netranných her. Ke každé nestranné hře existuje hra Nim na jedné hromádce, která je s ní ekvivalentní. Tento hluboký výsledek bude náplní dalších úloh, viz také 2.17.

Úloha 2.14. Nim čísla (nimbers nebo také nimy). Pro libovolné přirozené číslo n definujeme hru

$$\bullet n \equiv \{L \mid R\}, \quad \text{kde } L = R = \{\bullet 0, \bullet 1, \ldots, \bullet(n-1)\}.$$

Levá a pravá množina hry $\bullet n$ je stejná, obě množiny obsahují $\bullet n'$ pro $0 \leq n' < n$. Hry tvaru $\bullet n$ se nazývají nimbers (také nim, nim čísla).

1. Zkontrolujte následující výpočty a tyto výsledky zobecněte.

$$\bullet 0 = 0, \quad \bullet 1 = *, \quad \bullet 2 = \{0, * \mid 0, *\}.$$

2. Budeme-li mít hru Nim na jedné hromádce, jaké výsledky lze očekávat? Tuto hypotézu můžete dokázat také matematickou indukcí.
3. Pro libovolná čísla n dokažte $\bullet n = -(\bullet n)$. Využijete také úlohu 2.4 nebo matematickou indukci.
4. Jaké pozici odpovídá součet $\bullet n + \bullet n$, kde n je nějaké přirozené číslo? Tato pozice je ekvivalentní nulové hře, kde vyhraje druhý hráč, tj. $\bullet n + \bullet n = 0$.
5. Pro libovolné přirozené číslo n platí: Je-li $n \geq 1$, potom $\bullet n \parallel 0$. Dokažte. Takové nimy nejsou čísla.
6. Kde leží nim čísla na nadreálné ose?

Úloha 2.15. Další vlastnosti mex. Nechť $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ je konečnou množinou přirozených čísel, a $\operatorname{mex} S$ její hodnota mex. Budeme chtít dokázat platnost:

$$\{\bullet s_1, \ldots, \bullet s_m \mid \bullet s_1, \ldots, \bullet s_m\} + \bullet(\operatorname{mex} S) = 0$$

Toto zjednodušení bude mít i vliv na nim součet.

1. Objasněte, jaké herní situaci odpovídá levá strana dokazované rovnosti. V jaké hře zahraje první hráč? Hra je rozdělena na dvě části (součet her). Nakreslete si také obrázek popisované situace.
2. Ukažte, že tato pozice je nulovou hrou (prohraje začínající hráč). Doplňte potom důkaz celého tvrzení.

Úloha 2.16. O dalších vlastnostech nim součtu. V úloze 2.11 jsme rozebrali sčítání nimů. V této úloze objasníme vztah k nim součtu. Pro všecha přirozená čísla n a m platí:

$$\bullet n + \bullet m = \bullet(n \oplus m).$$

Věta říká, jakým způsobem získáme součet nimů. Může se spočítat tak, použijeme součet $n \oplus m$.

1. Jako příklad vypočítejte $\bullet 0 + \bullet 0$ a výsledek porovnejte s $\bullet(0 \oplus 0)$.
2. Vypočtěte $\bullet 1 + \bullet 1$ a výsledek porovnejte s $\bullet(1 \oplus 1)$.
3. Nyní budeme chtít pravidlo dokázat obecně. K tomu vytvoříme výroky o kterých budeme předpokládat, že platí:

$$\bullet n' + \bullet m = \bullet(n' \oplus m),$$
$$\bullet n + \bullet m' = \bullet(n \oplus m')$$

pro libovolná přirozená čísla n' menší než n a všechna přirozená čísla m' menší než m. Nyní musíme ukázat, že také platí pro levou stranu $\bullet n + \bullet m$ rovnost s $\bullet(n \oplus m)$. Proveďte! Využijte třetí tvrzení z úlohy 2.15.

Úloha 2.17. Sprague–Grundyova věta. Sprague–Grundyova[2] věta říká, že každá pozice libovolné nestranné hry (kombinatorické hry dvou hráčů), ve které mají oba hráči ty samé možnosti tahů, je ekvivalentní nějaké hře Nim na jedné hromádce. Důkaz je cílem této úlohy.

1. Nechť G je libovolná nestranná hra (pozice). Jaké informace máte o levých a pravých množin hry?
2. Budeme dokazovat tvrzení indukcí. Budeme předpokládat, že tvrzení platí pro levé a pravé části hry G. To znamená, že tyto hry jsou ekvivalentní nějakému nimu, který je tvaru $\bullet n$. Jak můžeme pokračovat? Viz výsledek úlohy 2.15.

2.1.1 Optimální tahy

Úloha 2.18. Optimální tahy ve hře Nim. Již víme, že hry, které jsou na hromádkách o velikostech $x_1, \ldots, x_n$, jsou vyjádřené pomocí $\bullet z$, kde

$$z = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n.$$

V této úloze chceme popsat optimální tahy ve hře Nim.

1. Ukažte, že zmenšíme-li počet kamenů na i-té hromádce, dostaneme novou pozici

$$\bullet z' = \bullet(x_1 \oplus \cdots \oplus x_{i-1} \oplus x_i' \oplus x_{i+1} \oplus \cdots \oplus x_n),$$

   s hodnotou

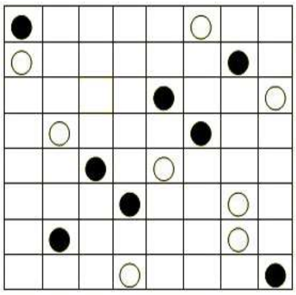
$$\bullet(z \oplus x_i \oplus x_i').$$

2. Pokud z není nula, potom je nějaká hromádka i taková, že $z \oplus x_i$ (považováno za přirozené číslo), menší než x_i. (Použijte dvojkovou soustavu.) Ukažte, že když hromádku zmenšíte na $x_i' = z \oplus x_i$, nová pozice bude $z' = 0$.
3. Jak použijete předcházející tvrzení pro vyhledání optimálního tahu?

Úloha 2.19. Optimální tahy v Northcottově hře. Northcottova hra se hraje na šachovnici. V každé horizontální řadě je umístěna jedna bílá a jedna černá královna. Pohyb je možný pouze horizontálně. Hráč levý hraje s černou dámou a pravý s bílou dámou. Hráč na tahu posune ve svém směru (černý doprava, bílý vlevo) svou dámu. Dámy se nepřeskakují. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

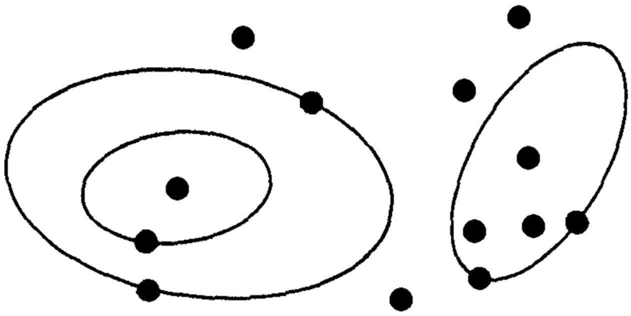
1. Zahrajte si několik partií, třeba i na menší šachové desce.
2. Nalezněte pravidlo, jak hrát tuto hru optimálně.
3. Který z hráčů má na obrázku vyhrávající strategii? Jak zahraje?
4. Vytvořte program, který bude simulovat tuto hru!
5. Co se změní, budou-li hráči moci hrát dopředu i vzad?

[2] Větu nezávisle dokázali Roland Sprague a Patrick Grundy v roce 1935, resp. 1939



Úloha 2.20. Optimální tahy ve hře Rim. Na počátku hry jsou dány body na papíře. Hráč na tahu udělá uzavřenou křivku, která protíná nějaký dosud neoznačený bod. Křivky se nesmějí protínat. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál.

1. Zahrajte si Rim a potom analyzujte situaci pro malý počet bodů.
2. Nalezněte pravidlo, jak hrát tuto hru optimálně. Co má tato hra společného s hrou Nim?
3. Který z hráčů má vyhrávající strategii na následujícím obrázku? A jak bude hrát?
4. Co se změní, nebude-li se hrát tato hra v rovině, ale na válci nebo torusu?



Úloha 2.21. Optimální tahy v tzv. odčítacích hrách. Hra odčítání se hraje podobně jako hra Nim na několika hromádkách. Dovolenými tahy jsou odebrání $1, 2, 3$ kamenů z libovolné hromádky. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál, protože na hromádkách již nejsou kameny. V této úloze budeme psát $S(n)$ pro takovou hru, která je na n hromádkách.

1. Objasněte:
$$S(0) = \bullet 0, \quad S(1) = \bullet 1, \quad S(2) = \bullet 2, \quad S(3) = \bullet 3.$$
2. Kolik je $S(4)$?
3. Rozšiřte svá pozorování pro $S(n)$.
4. Jak se hraje hra odčítání na několika hromádkách?
5. Co se na hře změní, omezíme-li se na jiný počet možných tahů? Tj. nevyžadujeme odebrání maximálně 3 kamenů, ale nějaké jiné přirozené číslo k?

Úloha 2.22. Optimální strategie v Bachetově hře. Hra na 100. Dva hráči začínají se součtem 0. Hráči se v tazích střídají, v každém tahu mohou přičíst k výsledné sumě nejvýše 10. Hráč, který dosáhne součtu 100, vyhrál.

Jak se hraje optimálně hra 100? Kdo vyhraje? Co má společného tato hra s odečítací hrou?

Úloha 2.23. Optimální strategie v další hře na způsob hry NIM. V jedné variantě hry NIM je dovoleno vybrat jednu hromádku, z ní odebrat nejméně jeden kámen a zbytek hromádky rozdělit na dvě hromádky (může být i prázdná). Označíme shodně $S(n)$ pro hru s n kameny.

1. Objasněte:
$$S(0) = \bullet 0, \quad S(1) = \bullet 1.$$
2. Objasněte následující rekurzivní formuli pro $S(n)$:
$$S(n) = \{M \mid M\}, \qquad \text{kde } M \equiv \{S(i) + S(j)\,;\, i, j \geq 0 \text{ a } i + j < n\}.$$
Množina M se skládá ze všech her tvaru $S(i) + S(j)$, kde i a j jsou přirozená čísla, jejichž součet je menší než n.
3. Indukcí dokažte: Je-li $n \in \mathbb{N}$, potom $S(n) = \bullet n$.
4. Jak se bude v této hře hrát optimálně?

Úloha 2.24. Počítání od konce. Na stole je hromádka kamenů. Dva hráči střídavě z hromádky odebírají kameny, v každém tahu lze odebrat od 1 do 5 kamenů. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen.

1. Co můžete říct o pozici, ve které není kámen?
2. Je-li na hromádce $1, 2, \ldots, 5$, kdo vyhraje?
3. Na hromádce leží 6 kamenů, jak se situace změní?
4. Je-li na hromádce 11 kamenů, kdo má vyhrávající strategii?
5. Které pozice jsou vyhrávající?

Úloha 2.25. Počítání od začátku. Na stole leží tři hromádky kamenů. V každém tahu oba hráči mohou odebrat alespoň jeden kámen, z jedné hromádky. Mohou odebrat i celou hromádku. Vyhraje hráč, který odebere poslední kámen.

1. Každé přirozené číslo má jednoznačný dvojkový rozvoj.
2. Tak jako obvyklé písemné sčítání, píšeme čísla po sebe, ale ve sloupcích, jestliže je sudý počet jedniček, píšeme nulu, v případě lichého počtu, píšeme 1. (Součet bez přenosu do vyšších řádů.) Toto sčítání se nazývá nim součet.
3. V desítkové soustavě máme čísla (počet kamenů) $13, 12$ a 7 (nebo $14, 11, 5$). Převeďte tato čísla do dvojkové soustavy, sečtěte je ve dvojkové soustavě a také podle předcházejícího předpisu nim součtu.
4. Pozice se nazývá nulovou, je-li výsledek nula. Jinak je pozice regulární. (Poslední pozice je nulová, předcházející je nenulová). Vyhrávající pozice je regulární a prohrávající pozice je nulová (existuje vyhrávající strategie pro II. hráče). Dokažte.
5. Z regulární pozice existuje tah do nulové pozice, z nulové pozice všechny tahy vedou do regulární pozice.
6. Jaký tah bude následovat z pozice $13, 12$ a 7 kamenů?
7. Kolik je možných prvních tahů? Porovnejte tuto metodu s metodou „hrubé síly“, resp. grafu všech logických možností.

Úloha 2.26. Symetrie a počítání od konce. Na stole leží dvě hromádky kamenů (nebo jiných předmětů). V každém tahu může hráč odebrat jeden kámen z jedné hromádky, nebo současně jeden kámen z obou hromádek. Jako obvykle, vyhrává hráč, který odebere poslední kámen. Uměli byste nalézt obecné pravidlo pro nalezení vyhrávajících pozic? Použijte šachovnici!

Úloha 2.27. Další úlohy jsou na http://86.49.36.65/6sbirka/show_category.php?c=10 (říjen 2014) nebo http://cgt.ic.cz/hs/index.html

Doporučená literatura

[CGT] A. Siegel: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[LIP] M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*, A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA, 2007

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[TKH] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6