Padesát let s nadreálnými čísly
STIGMA 2020

Václav Vopravil

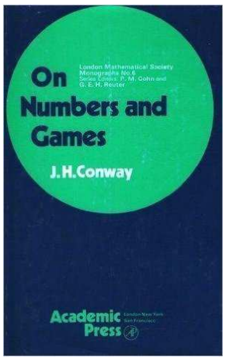
Praha

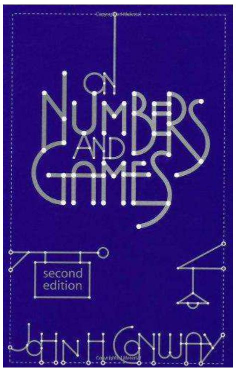
hs@wopravil.cz

14.–18. 9. 2020

- E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6
- J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6
- D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261
- J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

CONWAY John [1976], *On Numbers and Games*, Londres, Academic Press Inc., 1976





CONWAY, John H., *Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, (1983)

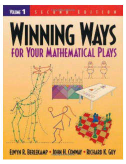
EBBINGHAUS, Heinz-Dieter, et al., *Numbers*, Volume **123** of Graduate Texts in Mathematics (1990). (Translation of the German version *Zahlen*.)

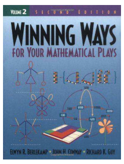
The Book of Numbers. By John Horton Conway and Richard K. Guy. Springer-Verlag, 1996, 320

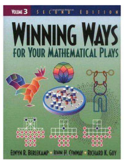
SCHLEICHER Dierk, STOLL Michael, *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, arXiv:math/0410026 (2005) et Moscow Math Journal **6** 2 (2006), 359-388

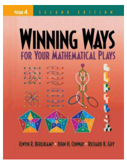
FERGUSON Thomas S., *Game Theory, Impartial Combinatorial Games* (UCLA lecture), 2nd ed. (2014)
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf

BERLEKAMP Elwyn et CONWAY John et GUY Richard, *Winning Ways for your mathematical plays*, Vol. 1-4, 2nd Edition, Wellesley (Massachusetts), A K Peters, 2001–2004



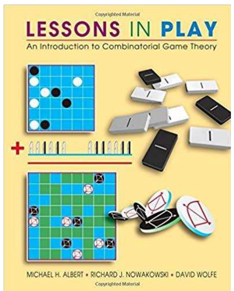


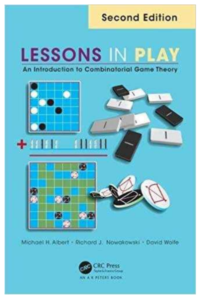




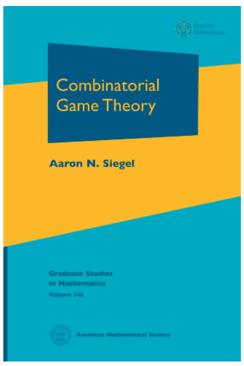
E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. Guy. Winning Ways for your Mathematical Plays. Academic Press, 1982;
Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele, Vieweg, 1985

M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*, A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA, 2007, 2019





A. Siegel: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013



$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

Teoretický von Neumannův model množiny $\mathbb{N}$ se opírá o následovníka $S(n) = n \cup \{n\}$. Existenci $\mathbb{N}$ zaručuje axióm nekonečna.
Například číslo $3 = S(S(S(0)))$ je:

$$\begin{aligned}
0 =& \emptyset, \\
1 =& 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}\,, \\
2 =& 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,, \\
3 =& 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\,, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\,,
\end{aligned}$$

atd. Nebo-li $0 = \{\}$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ a $3 = \{0, 1, 2\}$ atd. Zatímco von Neumann (1923) vytváří větší a větší čísla, Dedekind (1858) se věnuje zaplňováním prázdných míst mezi racionálními čísly. Zatímco von Neumannův model používá vždy jednu množinu, Dedekind používá dvě. Můžeme si představit, že i u von Neumanna jsou dvě množiny, druhá je ovšem vždy prázdná.

Definice

Dedekindův řez (L, R) se skládá ze dvou množin $L, R \subseteq \mathbb{Q}$, které jsou neprázdné a takové, že $L \cup R = \mathbb{Q}$. Navíc každý prvek z L je menší než všechny prvky z R a množina L neobsahuje největší prvek.

Dedekindovy řezy definují všechna reálná čísla.

Příklad

V případě, že množina R má minimum, definuje Dedekindův řez racionální číslo $\min R$ např.

$$1 = (\{x \in \mathbb{Q};\ x < 1\}, \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 1\}).$$

V případě, že množina R nemá minimální prvek, pak Dedekindův řez definuje iracionální číslo $\inf R$, např.

$$\sqrt{2} = \left(\{x \in \mathbb{Q};\ x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 < 2)\}, \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \wedge x^2 > 2\}\right).$$

Definice

Dedekindův řez (L, R) se skládá ze dvou množin $L, R \subseteq \mathbb{Q}$, které jsou neprázdné a takové, že $L \cup R = \mathbb{Q}$. Navíc každý prvek z L je menší než všechny prvky z R a množina L neobsahuje největší prvek.

Nyní změníme definici tak, že nebudeme požadovat vytvoření racionálních čísel. Výsledný definovaný objekt budeme nazývat nadreálné číslo.
▷ Množina L a množina R nemusí být množinami racionálních čísel. Místo toho vezmeme množiny dříve vytvořených nadreálných čísel.
▷ Když L a R nejsou podmnožinami $\mathbb{Q}$, nemá smysl trvat na podmínce $L \cup R = \mathbb{Q}$, tuto podmínku vynecháme.
▷ Nyní množiny L a R jsou dříve vytvořené množinami (nadreálných) čísel. Budeme mít snazší cestu, pokud nebudeme trvat na podmínce, že množiny L a R jsou neprázdné a nekonečné. Proto také odstraníme tyto dvě podmínky.
▷ Konečně změníme zápis z (L, R) na $\{L \mid R\}$, abychom odlišili nadreálné číslo.

Mimo vytvoření nosiče nadreálných čísel ještě budeme chtít zachovat vlastnosti racionálních čísel, např. sčítání, odčítání, násobení a dělení apod.
V přirozených číslech platí $x' < x \Leftrightarrow x' + y < x + y$ i $y' < y \Leftrightarrow x + y' < x + y$ a podobně v ostatních případech.
V celých číslech platí $x' < x \Leftrightarrow -x < -x'$ a $x < x' \Leftrightarrow -x > -x'$.
V celých číslech platí:
$x > x' \wedge y > y' \Rightarrow (x - x')(y - y') > 0 \Rightarrow xy > x'y + xy' - x'y'$ a podobně v ostatních případech.
V racionálních číslech platí: $0 < \frac{1}{y} = s$ pro $y > 0$. Mimo to platí
$0 < y' < y \wedge s' < \frac{1}{y} \Rightarrow (y - y')(\frac{1}{y} - s') > 0 \Rightarrow 1 - \frac{y'}{y} - ys' + y's' > 0 \Rightarrow \frac{1 + (y' - y)s'}{y'} > \frac{1}{y}$ a podobně v ostatních případech. Podobně lze motivovat i definici odmocniny.

Definice

Hra je uspořádaná dvojice množin her.

Všechny hry jsou vytvořeny pomocí tohoto pravidla.

První hry

Conwayova indukce

Předpoklad, že hra neobsahuje nekonečný do sebe vnořený řetězec jednodušších her, umožňuje vyslovit tvar důkazu indukcí, která se nazývá infinite descent. Nechť $P(X)$ je nějaké tvrzení, které chceme dokázat, tj. je pravdivé pro každé X. Potom stačí dokázat: Platí-li $P(Y)$ pro všechny možnosti Y v X, potom $P(X)$ platí.

Protože pokud vlastnost $P(X)$ neplatí pro nějakou hru X_0, potom věta také neplatí pro nějaké X_1 (možnost v X_0), možnost X_2 v X_1, ..., což vede na nekonečnou množinu do sebe vnořených her, což není možné, tedy vlastnost $P(X)$ platí pro všechny hry X.

Uspořádání

Definice

Jsou-li X a Y hry, říkáme, že levý preferuje X nad Y (nebo pravý preferuje Y nad X) a píše se $X \geqslant Y$, pokud neplatí $Y^L \geqslant X$ nebo $Y \geqslant X^R$, kde Y^L reprezentuje libovolnou levou možnost v Y a X^R reprezentuje libovolnou pravou možnost v X.

$X \leqslant Y \Leftrightarrow Y \geqslant X$	hra X je nejméně tak dobrá pro pravé
$X = Y \Leftrightarrow X \leqslant Y \wedge Y \leqslant X$	X je ekvivalentní s Y
$X \parallel Y \Leftrightarrow$ neplatí $X \geqslant Y$ ani $Y \geqslant X$	hry X a Y jsou fuzzy.

Úloha

1. Dokažte následující vztahy:
   1. $0 \geqslant 0$
   2. $1 \geqslant 0$
   3. $0 \geqslant -1$
   4. $2 \geqslant 1 \geqslant 1/2 \geqslant 0$.

   Například $1 \geqslant -1$, podle definice $-1^L \not\geqslant 0 \wedge -1 \not\geqslant 1^R$. Protože -1^L ani 1^R neexistují, je tvrzení pravdivé.
2. Dokažte, že následující tvrzení nejsou pravdivá:
   1. $0 \geqslant 1$
   2. $0 \geqslant 1/2$
   3. $0 \geqslant *$
   4. $* \geqslant 0$.

   Například neplatí $-1 \geqslant 1$, protože existuje $1^L = 0$, $0 \geqslant 1$ a existuje $-1^R = 0$ tak, že $1 \geqslant 0$.
3. Ověřte platnost rovností:
   1. $2 = \{0, 1 \mid\}$
   2. $2 = \{1 \mid\} = \{-1, 1 \mid\} = \{0, -1, 1 \mid\}$.

Věta

Relace $\leqslant$ je tranzitivní.

(Infinite descent). Předpokládejme $X \geqslant Y$ a $Y \geqslant Z$. To znamená, že neplatí

$$Y^L \geqslant X \vee Y \geqslant X^R \vee Z^L \geqslant Y \vee Z \geqslant Y^R.$$

Naším cílem je dokázat $X \geqslant Z$, což znamená, že neplatí

$$Z^L \geqslant X \vee Z \geqslant X^R.$$

Nejdříve dokážeme první tvrzení.
To, že máme dokázat tvrzení o Z^L nám napoví, že máme použít indukci. To znamená, že budeme předpokládat, že podobné tvrzení platí pro všechny dříve vytvořené (jednodušší) hry. Proto předpokládejme, že věta platí pro všechny možnosti hry Z, speciálně pro Z^L. Nyní použijeme navíc důkaz sporem. Sporem předpokládejme, že platí $Z^L \geqslant X$ pro nějakou možnost Z^L. To ale znamená, že díky $X \geqslant Y$, platí i $Z^L \geqslant Y$, což je v rozporu s naším předpokladem. Tedy $Z^L \geqslant X$ neplatí.
Analogicky se dokáže druhá část důkazu, že ani $Z \geqslant X^R$ neplatí. □

Úlohy

1. Pro libovolnou hru X dokažte:
   1. nerovnost $X \geqslant X^R$ není platná
   2. nerovnost $X^L \geqslant X$ není platná
   3. $X \geqslant X$.

   Poznámka: Všechny tři tvrzení dokazujte současně pomocí infinite descent.
   Příklad: Dokážeme neplatnost $X \geqslant X^R$. Budeme předpokládat, že tvrzení platí pro všechny jednodušší hry, možnosti v X. Neplatnost $X \geqslant X^R$ znamená, že existuje $X^{RL} \geqslant X$ nebo existuje X^R tak, že $X^R \geqslant X^R$. Poslední tvrzení díky indukci předpokládáme.
2. Dokažte $X = X$.
3. Dokažte, že $=$ je ekvivalence.

Věta (Klasifikační věta)

Nechť X je libovolná hra, potom:

1. *$X > 0$, X je kladná, což znamená, že je $X \geqslant 0$ a rovnost nenastane, tj. existuje vyhrávající strategie pro levého hráče.*
2. *$X < 0$, X je záporná, což znamená, že je $X \leqslant 0$ a rovnost nenastane, tj. existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče.*
3. *$X = 0$, X je nulová, což znamená, že existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.*
4. *$X \parallel 0$, X je fuzzy, což znamená, že existuje vyhrávající strategie pro I. hráče.*

Důsledek

Každá hra X má buď vyhrávající strategii pro 1. hráče, nebo druhého, nebo vyhrávající strategii pro levého, popřípadě pravého hráče.

Úlohy

1. Dokončete důkaz klasifikační věty.
2. Věta o dominujících prvcích: Nechť $X = \{A, B, C, \dots \mid D, E, \dots\}$ a předpokládejme, že $A \leqslant B$ a $D \geqslant E$. Potom $X = \{B, C, \dots \mid E, \dots\}$. Dokažte!

Sčítání

Definice

Nechť X, Y jsou hry. Potom součet $X + Y$ je

$$X + Y \equiv \left\{X^L + Y, X + Y^L \,\middle|\, X^R + Y, X + Y^R\right\}.$$

Důkazy hraním her

Úlohy

1. Dokažte:
   1. $0 + 0 \equiv 0$
   2. $1 + 0 \equiv 1$
   3. $* + 0 \equiv *$
   4. $1 + 1 \equiv 2$.
2. Následující tvrzení dokazujte hraním příslušných her:
   1. $2 + (-1) \geqslant 0$
   2. $2 + (-1) + (-1) = 0$
   3. $* + * = 0$
   4. $1/2 + 1/2 + (-1) = 0$.

   Příklad: Dokážeme $1 + (-1) = 0$. Protože $1 \equiv \{0 \mid\}$ a $-1 \equiv \{\mid 0\}$, ve hře $\{0 \mid\} + \{\mid 0\}$ může první hráč zahrát v jedné komponentě a druhý hráč dotáhne. Proto ve hře $1 + (-1)$ existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.
3. Dokažte $X + 0 \equiv X$ pro libovolnou hru X.

Věta

Pro všechny hry X, Y, Z platí

1. $X + Y \equiv Y + X$
2. $X + (Y + Z) \equiv (X + Y) + Z$.

Věta

Pro všechny hry X, Y platí: $X \geqslant 0 \wedge Y \geqslant 0 \Rightarrow X + Y \geqslant 0$.

Definice

Pro libovolnou hru X, opačná hra $-X$ ke hře X je tato hra:

$$-X \equiv \left\{-X^R \,\middle|\, -X^L\right\}.$$

Věta

Pro libovolné hry X, Y platí:

1. $-(X + Y) \equiv (-X) + (-Y)$
2. $-(-X) \equiv X$
3. $X \geqslant Y \Leftrightarrow -Y \geqslant -X$.

Věta

Pro libovolnou hru X, Y platí: $X \geqslant Y \Leftrightarrow X - Y \geqslant 0$.

Věta

Pro libovolnou hru X platí $X + (-X) = 0$.

Úlohy

1. Dokažte předcházející věty! Často můžete nalézt více důkazů: zahráním si příslušných her, infinite descent, nebo použitím předcházejících dokázaných vět.
2. Dokažte $X = Y \wedge W = Z \Rightarrow X + W = Y + Z$.
3. Dokažte, že nestranné hry jsou samy k sobě opačné. Udělejte z toho závěr, že v nestranných hrách existuje vyhrávající strategie pro I. hráče nebo existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.
4. Definujte $*1 \equiv \{0 \mid 0\}$, $*2 \equiv \{0, *1 \mid 0, *1\}$, $*3 \equiv \{0, *1, *2 \mid 0, *1, *2\}$, ..., obecně
$$*n \equiv \{0, *1, \ldots, *(n-1) \mid 0, *1, \ldots, *(n-1)\}.$$
Dokažte, že součtem dvou her tohoto tvaru je opět hra tohoto tvaru.

Nadreálná čísla

Definice

Nadreálné číslo x je hra x, pro kterou

1. všechny možnosti x jsou čísla
2. neplatí $x^L \geqslant x^R$.

Slovy: Žádná levá možnost hry x není větší ani rovna žádné pravé možnosti hry x.

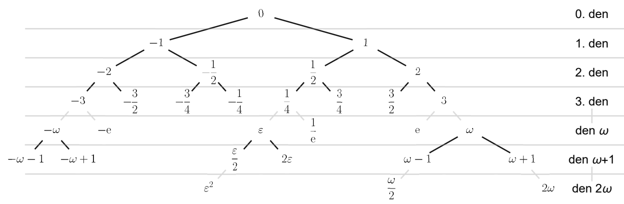
Všechna čísla jsou vytvořena tímto způsobem.

Dne nula se narodí nadreálné číslo $0 \equiv \{|\}$. Obě části definice jsou splněny triviálně. Jinými příklady čísel narozených v několika následujících dnech, jsou: $1 \equiv \{0 \mid\}, 2 \equiv \{0, 1 \mid\}, 3 \equiv \{0, 1, 2 \mid\}, \ldots$
$-1 \equiv \{\mid 0\}, -2 \equiv \{\mid 0, -1\}, -3 \equiv \{\mid 0, -1, -2\}, \ldots$

$$\begin{aligned} n &\equiv \{0, 1, 2, \ldots, (n-1) \mid\} \\ -n &\equiv \{\mid 0, -1, -2, \ldots, -(n-1)\}. \end{aligned}$$

Tato čísla vznikají $n$tého dne. Je celkem jednoduché si rozmyslet, že tato nadreálná čísla a jejich sčítání je „to samé“ jako obvyklé sčítání s celými čísly.

$$1/2 \equiv \{0 \mid 1\}, \; 1/4 \equiv \{0 \mid 1/2\}, \; 3/4 \equiv \{1/2 \mid 1\}, \ldots$$



Věta

1. *Nechť x je nadreálné číslo, potom i $-x$ je nadreálné číslo.*
2. *Nechť x, y jsou nadreálná čísla, potom i $x + y$ je nadreálné číslo.*
3. *Nechť x, y jsou nadreálná čísla, potom buď $x \geqslant y$ nebo $x \leqslant y$.*

Úlohy

1. Ověřte, že $2 + 1 = 3$, $2 + 2 = 4$, $2 + 3 = 5$, atd.
2. Dokažte trichotomii nadreálných čísel.
3. Pro libovolné nadreálné číslo x platí $x^L < x < x^R$. Dokažte!
4. Nalezněte všechna čísla narozená dne 0, 1, 2 a 3. Nalezněte pravidlo, která čísla vznikají? Pravidlo dokažte!

Definice

Nechť x, y jsou čísla. Potom

$$xy \equiv \Big\{x^L y + x y^L - x^L y^L,\; x^R y + x y^R - x^R y^R \,\Big|\, x^L y + x y^R - x^L y^R,\; x^R y + x y^L - x^R y^L\Big\}.$$

Úloha

Podle definice vypočtěte $0 \cdot 1$, $1 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 1/2$ a podobně.

Věta

Nechť x, y a z jsou nadreálná čísla.

1. $x \cdot 0 \equiv 0$
2. $x \cdot 1 \equiv x$
3. $xy \equiv yx$
4. $(-x)y \equiv x(-y) \equiv -(xy)$
5. $(x + y)z = xz + yz$
6. $(xy)z = x(yz)$.

Věta

Nechť x, y jsou nadreálná čísla, potom $x \cdot y$ je nadreálné číslo. Je-li navíc $x > 0$ a $y > 0$, potom $xy > 0$.

Věta (Věta o nejstarším prvku)

Nechť $x \equiv \{x^L \mid x^R\}$ je číslo. Nechť z je číslo mezi x^L a x^R, ale žádná možnost čísla z tuto vlastnost nemá. Potom $x = z$.

Příklad

Například $\{-1 \mid 2\} = 0$, protože 0 je nejjednodušší mezi -1 a 2. Pár příkladů:
Například $\{-1, 0 \mid 1\}$ musí být číslo mezi 0 a 1. Nejstarším prvkem je $1/2$. Proto $\{-1, 0 \mid 1\} = 1/2$.
$1/2 + 1/2 \equiv \{1/2 \mid 1 + 1/2\}$. Nejstarší číslo mezi $1/2$ a $1 + 1/2$ je jedna, proto $1/2 + 1/2 = 1$.

Úlohy

1. Dokažte větu o zjednodušování. Nápověda: Nejdříve dokažte $x \geqslant z$.
2. Ukažte, že v seznamu jsou všechna nová čísla, která vznikla 3. dne.
3. Uvažte, že jsme nová čísla označili dobře, tj. například:

$$\begin{aligned} 3 &= 2+1 \\ 2(3/2) &= 3 \\ 3/4+3/4 &= 3/2 \\ 1/4+1/4 &= 1/2, \dots \end{aligned}$$

4. Každý konečný den vznikne pouze jedno číslo mezi dvěma staršími čísly.
5. Dokažte, že v konečný den vznikají pouze dyadická čísla.

Po všech konečných dnech přichází následující den. Nazývá se ω. Tohoto dne vzniká mnoho dalších čísel. Například číslo

$$a \;=\; \{\text{ všechna starší čísla } y;\ 3y < 1 \mid \text{ všechna starší čísla } y;\ 3y > 1\}.$$

Některé prvky $a = \{1/4, 5/16, 21/64, \dots \mid 1/2, 3/8, \dots\}$. Podle věty o zjednodušování to znamená, že $a + a + a = 1$ a tedy $a = 1/3$.
Podobným způsobem získáme i další reálná čísla, která se doposud nenarodila, racionální a iracionální, včetně π, $\sqrt{2}$, φ a třeba e. Všechna vzniknou v den omega. Největší číslo narozené v den ω je samo ω.

$$\omega \;=\; \{0, 1, 2, 3, \dots \mid\},$$

které je samo větší, než všechna předcházející čísla (dříve vytvořená). Také vznikne číslo

$$-\omega \;=\; \{\mid 0, -1, -2, -3, \dots\},$$

a nejmenší kladné číslo dne ω je číslo:

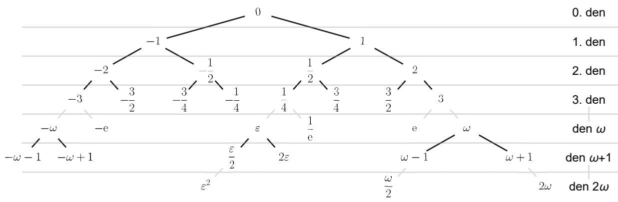
$$1/\omega \;=\; \{0 \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}.$$

Tato čísla jsou nekonečně velká a malá v rámci nadreálných čísel.

Tvorba čísel nekončí ve dne ω, ale pokračuje dále, např. následujícího dne vznikne i:

$$\begin{aligned} \omega + 1 &= \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega \mid\} \\ & \{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega\}, \end{aligned}$$

a podobně i v následujících dnech...



Úlohy

1. Dokažte $a + a + a = 1$.
2. Dokažte, že $\sqrt{2}$ vznikne ve dne ω.
3. Dokažte:

$$\begin{aligned} \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega \mid\} &= \omega + 1 \\ \{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega\} &= \omega - 1. \end{aligned}$$

4. Dokažte:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1 \mid\} \;=\; \omega + 2.$$

5. Dokažte:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, \mid \omega, \omega - 1\} \;=\; \omega - 2.$$

Obecně $\{0, 1, 2, 3, \dots, \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \dots, \omega - (n-1)\} = \omega - n$.

6. Který den vznikne číslo $z = \{0, 1, 2, 3, \dots, \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \dots, \}$? Ukažte, že $z = \omega/2$.

Lemma

Každé kladné nadreálné číslo x má tvar, ve kterém nula leží vlevo a všechny další levé prvky jsou kladné.

Definice

Nechť x je kladné nadreálné číslo. Nechť x je ve tvaru předcházejícího lemmatu. Potom inverzním (převráceným) prvkem k prvku x je

$$y = \left\{0, \frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} \;\middle|\; \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}\right.$$

Například: Nechť $x = 3 = \{0, 2 \mid\}$. A vypočteme $y = 1/3$. Vzhledem k definici dostaneme $y = \{0, \dots \mid \dots\}$, y^L použije pro výpočet y^R, tedy $y = \left\{0, \dots \;\middle|\; \frac{1+(2-3)\cdot 0}{2}, \dots\right\} = \{0, \dots \mid 1/2, \dots\}$. Nyní máme dokonce y^R, které použijeme pro výpočet y^L, tedy

$$y = \left\{0, \frac{1 + (2-3)\frac{1}{2}}{2}, \dots \;\middle|\; 1/2, \dots\right\} = \{0, 1/4, \dots \mid 1/2, \dots\}.$$

Budeme-li takto pokračovat, získáme konečně

$$y = \{0, 1/4, 5/16, 21/64, \dots \mid 1/2, 3/8, 11/32, \dots\}.$$

Tento proces nikdy neskončí, protože y bude mít nekonečně čísel vlevo i vpravo, získáváme lepší a lepší aproximaci čísla $1/3$.

Úlohy

1. Dokažte předcházející lemma.
2. Spočtěte ještě několik dalších prvků čísla $1/3$.
3. Použitím definice $1/x$, spočítejte několik prvních omezení čísel pro:
   1. $2 = \{0, 1 \mid\}$
   2. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4 \mid\}$
   3. $1/2 = \{0 \mid 1\}$.

Věta

Nechť x je kladné nadreálné číslo. Předpokládejme, že y je převrácený prvek k prvku x. Potom

1. $xy^L < xy^R$
2. *y je číslo*
3. $(xy)^L < 1 < (xy)^R$
4. $xy = 1$.

$$\sqrt{x} = \left\{ \sqrt{x^L}, \frac{x+y^Ly^R}{y^L+y^R} \,\middle|\, \sqrt{x^R}, \frac{x+y^Ly^{L'}}{y^L+y^{L'}}, \frac{x+y^Ry^{R'}}{y^R+y^{R'}} \right\}$$

Úlohy

1. Vypočtěte několik prvních levých a pravých částí $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.
2. Dokažte, že $\sqrt{x}$ definuje nadreálné číslo.
3. Dokažte, že $\sqrt{x}$ je druhá odmocnina x.

Úloha

1. Sestrojte nadreálná čísla $3/8$ a $5/8$ a dokažte, že $3/8 + 5/8 = 1$. Definujte všechna ostatní čísla, která použijete.
2. Sestrojte $2/5$ a $3/5$ jako nadreálná čísla a ověřte, že $2/5 + 3/5 = 1$. Můžete předpokládat, že jsou již vytvořena všechna dyadická čísla. (Dyadická čísla jsou racionální čísla tvaru $m/2^k$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}$.)
3. Definujme reálné číslo x jako takové číslo, pro které $-n < x < n$ pro nějaké přirozené číslo n a je-li $x \equiv \{x-1, x-1/2, x-1/4, \dots \mid x+1, x+1/2, x+1/4, \dots\}$. Ukažte, že každé reálné číslo má jednoznačně určený tvar $\{L \mid R\}$, kde L, R jsou množiny dyadických čísel takových, že
   1. L, R jsou neprázdné.
   2. L nemá největší prvek a R nemá nejmenší prvek.
   3. Všechna dyadická čísla (mimo jedno) jsou obsažena v L a R.
4. Zopakujme, že $\omega = \{0, 1, 2, \dots \mid\}$ je nadreálné číslo. Sestrojte $\sqrt{\omega - 1}$ a $(\omega + 1)^{-1}$. Můžete předpokládat, že všechna reálná čísla jsou již vytvořena. Pravděpodobně budete muset vytvořit i další čísla.

Návrhy definic čísel

1. $n + 1 = \{n \mid\}$
2. $-n - 1 = \{\mid -n\}$
3. $n + \frac{1}{2} = \{n \mid n+1\}$
4. $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots \mid\}$
5. $\varepsilon = \left\{0 \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \frac{1}{\omega}$
6. $\{\omega \mid\} = \omega + 1$
7. $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega\} = \omega - 1$
8. $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots \mid\} = 2\omega$
9. $\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots \mid\} = \omega^2$
10. $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \omega-1, \omega-2, \omega-3, \dots\} = \frac{\omega}{2}$
11. $\left\{0, 1, 2, 3, \dots \,\middle|\, \omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{4}, \dots\right\} = \sqrt{\omega}$
12. $\left\{0, 1, 2, 3, \dots \,\middle|\, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots\right\} = \varepsilon^\omega$
13. $\left\{0, 1, 2, 3, \dots \,\middle|\, \omega, \sqrt[2]{\omega}, \sqrt[3]{\omega}, \sqrt[4]{\omega}, \dots\right\} = \log \omega$.
14. ...

Návrhy definic čísel s ε

1. $\frac{1}{\omega} = \varepsilon$
2. $\{0 \mid \varepsilon\} = \frac{\varepsilon}{2}$
3. $\{0 \mid \frac{\varepsilon}{2}\} = \frac{\varepsilon}{4}$
4. $\{0 \mid \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{8}, \dots\} = \varepsilon^2$
5. $\{\varepsilon \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\} = 2\varepsilon$
6. $\{2\varepsilon \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\} = 3\varepsilon$
7. $\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\} = \sqrt{\varepsilon}$
8. etc.

hs@wopravil.cz

http://www.wopravil.cz/hs

Je ještě nekonečně mnoho tvrzení, která jsou třeba ověřit, ale máme jen konečně mnoho času... (D. Knuth)