Úvod do Conwayových her

1 Hry podle Conwaye

Budeme vyšetřovat vlastnosti orientovaného grafu, ve kterém jsou hrany grafu dvou typů (barev): L hrany a R hrany. Dva hráči L a R hrají hru: posunují kámen podle hran grafu, v tazích se střídají a každý z hráčů posunuje kámen pouze po hranách své barvy. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Mimo to je třeba ještě vymezit počáteční pozici (uzel grafu) a rozhodnout, který z hráčů ve hře bude začínat.

Budeme předpokládat, že v grafu není nekonečná cesta. Potom v každé situaci (pozici) má jeden z hráčů vyhrávající strategii.

Definice hry vyžaduje uspořádanou dvojici a množinu. Při analýze her dvou hráčů, kteří se v tazích střídají, rozdělíme uzly na dvě části: kam může zahrát L, resp. R hráč. Ve výsledku část informace je zbytečná. Například, pokud vede vede do některého uzlu L hrana, potom všechny L hrany vycházející z tohoto uzlu jsou zbytečné a nemají vliv na výsledek hry, protože L hráč nemůže po sobě zahrát dvakrát. Tyto hrany se ale stanou důležité, budeme-li hrát na více grafech současně (součet her).

Pro každou situaci (pozici, uzel, konfiguraci) jsou možné pouze 4 možnosti výsledků, jak hra dopadne. Dvě možnosti, začíná-li L hráč a dvě možnosti, začíná-li pravý R hráč. Budeme používat toto označení: hra > 0 (vyhraje L hráč, bez ohledu na možné tahy soupeře), < 0 (vyhraje pravý hráč, bez ohledu na možné tahy L hráče), $= 0$ (vyhraje druhý hráč) a konečně $\parallel 0$ (vyhraje první hráč, ten, který ve hře začíná).

Proč jsme zvolili toto označování, vyplyne z definice částečného uspořádání na množině her.

2 Kanonický tvar hry

Budeme definovat kanonický tvar hry indukcí. Jestliže X a Y jsou dvě množiny her, potom je uspořádaná dvojice (X, Y) je také hrou. Množinu X nazýváme možnostmi tahů L hráče a množinu Y je množinou možných tahů (možností) pravého hráče R.

Každé hře ve smyslu této definice odpovídá graf: z uzlu (X, Y) vedou L hrany do prvků množiny Y a také z uzlu (X, Y) vedou R hrany do prvků množiny X a z nich vedou další hrany podle tohoto pravidla, atd.

Požadavek neexistence nekonečných cest nám automaticky zaručí ve standardní axiomatické teorii množin (ZF) axióm fundovanosti. Tento axióm tvrdí, že neexistuje nekonečná posloupnost do sebe vnořených množin (ve které by následovník byl prvkem předcházejícího uzlu). Uvažme dále, že podle Kuratowského definice uspořádané dvojice $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ by zaručovala nekonečnou cestu v grafu, která by odpovídala takové posloupnosti. Chceme tedy vyloučit nekonečné cesty.

Pokud X a Y jsou prázdné množiny, dostaneme hru $(\varnothing, \varnothing)$, kterou označujeme 0. V této hře žádný z hráčů nemůže udělat tah (množina možností je prázdná).

Ve hře $(\{0\}, \varnothing)$ pravý hráč R nemůže udělat tah, zatímco levý hráč L může táhnout do hry 0. V této hře hra skončí. Grafem je dvojice uzlů, spojených orientovanou hranou, označenou L. Počáteční uzel odpovídá počáteční pozici ve hře. Tuto hru označíme 1.

Ve hře $(\{1\}, \varnothing)$ levý hráč, je-li na tahu, může zahrát dva tahy, pokud by mohl dvakrát táhnout po sobě. Pravý R hráč opět nemůže táhnout. Tuto hru označujeme 2.

V teorii her je obvyklé zjednodušení zápisu od množin k prvkům množin. Například místo hry $(\{0, 1\}, \varnothing)$, píšeme složené závorky a pouze prvky, tj. tedy $\{0, 1\, |\}$. Použitím těchto zápisů dostaneme například $\{2\, |\}$ odpovídá 3, a obecně každé přirozené číslo n odpovídá hře $\{(n-1)\, |\}$.

Hra $* \equiv \{0 \mid 0\}$ odpovídá hře Nim s jedním kamenem (ve které hráč odebere všechny kameny a vyhraje, druhý prohraje).

Pokud vyměníme množiny X a Y (nebo-li tahy L a R hráče), dostaneme hru $-n \equiv \{|\, n-1\}$, hru opačnou.

3 Konstrukce kanonického tvaru her

Každé hře v našem smyslu (graf, ve kterém je jedna počáteční pozice p) odpovídá hra v kanonickém tvaru. Tato hra je definována indukcí na grafu takto: Pokud pro nějaký uzel p všechny vycházející hrany vedou do uzlů, pro která již známe kanonický tvar, potom kanonický tvar pro uzel p bude dvojice (X, Y), kde X je množinou všech her odpovídající končícím L hran z uzlu p a analogicky pro množinu Y.

Formálně můžeme říct, uzel grafu nazveme známým, pokud tento uzel a všechny následující (podle hran grafu) uzly je možné definovat funkce „dostat kanonický tvar“, odpovídající s definicí indukce, a to jednoznačným způsobem. Aby to platilo je třeba dokázat, že pokud z některého uzlu všechny hrany vedou do známých uzlů, potom i tato pozice je známá. Nakonec je třeba dokázat, že pokud by existoval nějaký neznámý uzel, potom by bylo možné nalézt nekonečnou cestu po neznámých uzlech.

Dále je možné dokázat, že převedení ke kanonickému tvaru se nezmění výsledek hry (analogický výsledek pro Sprague–Grundyovy hry, pouze ve hrách, ve kterých L a R možnosti jsou stejné). Podotkněme ještě, že přechod od hry a jejímu grafu a naopak hru nezmění.

Proto v dalším textu budeme uvažovat hry v kanonickém tvaru, i když je také zajímavé vyšetřovat hry v obecném tvaru.

Pro hry v kanonickém tvaru je možné dát induktivní definici výsledku hry. K tomu označíme $G \geq 0$, pokud $G > 0$ nebo $G = 0$. Jinými slovy ve hře $G \geq 0$ platí $R \rightsquigarrow L$, tj. vyhraje levý hráč, pokud nebude ve hře začínat. Analogicky $G \leq 0$ znamená $L \rightsquigarrow R$, tj. vyhraje pravý, nebude-li začínat.

Induktivní definice: $G \geq 0$, pokud existuje taková hra G^R z množiny R možností, pro kterou by $G^R \not\leq 0$. Slovy L vyhraje ve hře G nezačne-li, pokud pravý nemůže táhnout tak, po kterém by vyhrál jako druhý.

Pro doplnění další označení je $|\!\rhd\, 0$. Vztah $G \mathrel{|\!\rhd}$ označuje, že neplatí $G \leq 0$, tj. neplatí $G < 0$ a neplatí $G = 0$. Strategicky vyhraje L, pokud začíná, symbolicky $L \rightsquigarrow L$. Analogicky se definuje ≤ 0 a $\lhd\!|\, 0$.

4 Součet her

Nechť jsou dány dvě hry G a H. Budeme vyšetřovat hru na dvou stolech, hranou paralelně (simultálně). Na jednom stolu se hraje hra G a na druhém hra H. Každý tah L (nebo R) spočívá v tom, že si hráč vybere stůl na kterém provede svůj tah. Tahem v jedné části neovlivní postavení na druhém stole. V tomto případě je možné, že hráč bude v nějaké hře hrát dvakrát po sobě. Hru, kterou dostaneme podle tohoto pravidla, nazýváme součtem her G a H a označujeme ji $G + H$. Lze říct, že uzly grafu hry $G + H$ jsou dvojice uzlů (po jednom v každé hře). Formální definice v kanonickém tvaru je

$$G + H \equiv \left\{ G^L + H, G + H^L \;\middle|\; G^R + H, G + H^R \right\}.$$

Tento zápis označuje, že levý hráč zahraje ve hře G a hra H zůstane nezměněna, G^L označuje L možnost L hráče ve hře G, etc.

Je snadné se přesvědčit (dvojnásobnou indukcí), že platí: $G+H \equiv H+G$ a $G+(H+K) \equiv (G+H)+K$. Znak $\equiv$ označuje rovnost (množin) v kanonickém tvaru. Máme ještě druhou rovnost $=$, (například $G = 0$, která označuje, že ve hře $G = 0$ vyhraje druhý hráč (označení je $\rightsquigarrow 2$). Tato rovnost $=$ bude dále zobecněna na příklad libovolných dvou her.

Znak $\parallel$ znamená, že ve hře $G \parallel 0$ existuje vyhrávající strategie pro prvního z hráčů (ten, který ve hře začíná, bez ohledu na možné tahy soupeře) $\rightsquigarrow 1$.

Například induktivní důkaz komutativnosti rovnosti je možné symbolicky zapsat takto: $G{+}H$ znamená hru $\left\{G^L + H, \ldots \;\middle|\; \ldots\right\}$. Podle předpokladu indukce je to hra $\left\{H + G^L, \ldots \;\middle|\; \ldots\right\}$. Ve složených závorkách na pořadí (důsledek sjednocení a vlastností množin) nezáleží a tím dostaneme i hru $H + G$.

Není těžké prověřit, že také naše přirozené číslo n odpovídá nějakému součtu (výhoda tahů).

Hra $-G$ je opačnou hrou ke hře G, která vznikne záměnou rolí L a R, neboli více formálně

$$-G \equiv \left\{ -(G^R) \;\middle|\; -(G^L) \right\}.$$

Lehce je možné se přesvědčit, že platí očekávané vlastnosti, tj. např.

$$-(G+H) = (-G) + (-H), \qquad -(-G) \equiv G.$$

Hra $-n$ je opačnou hrou ke hře n, důkaz opět indukcí.

Přechod k opačné hře (a vyměněním rolí L a R) otáčí > 0 v < 0 a naopak, resp. $\mathrel{|\!\rhd} 0$ do $\mathrel{\lhd\!|} 0$. Naopak $= 0$ a $\parallel 0$ se nezmění.

Výše uvedené označení opačné hry můžeme ospravedlnit tvrzením $G + (-G) = 0$ pro libovolnou hru G.

Současně tato rovnost označuje, že ve hře $G + (-G)$ vyhraje druhý hráč. Ve hře na dvou deskách, v níž jedna je opačná (levý si s pravým vyměnili role), má vyhrávající strategii druhý hráč ($\rightsquigarrow 2$). To je ale samozřejmé, druhý hráč může použít symetrické tahy, které narušil první hráč.

Poučitelné je dokázat tuto rovnost indukcí. Například $G + (-G) \geq 0$ označuje, že pro libovolný tah pravého platí $(G + (-G))^R \mathrel{|\!\rhd} 0$. Takové možnosti mají tvar $G^R + (-G)$ nebo $G + (-G)^R$. Sporem předpokládejme například $G + (-G)^R \leq 0$, tj. $G + (-G^L) \leq 0$. To je ale spor, protože tato nerovnost má také levou možnost $G^L + (-G^L)$, která je rovna nule, podle indukčního předpokladu. (Analogicky ve všech ostatních případech.)

Následující důležitý výsledek je: Pokud $G = 0$, potom hra $G + H$ má stejný výsledek jako hra H (výsledek patří do jedné ze 4 tříd). Jak se bude hrát hra $0 + G$? Ve hře 0 je $\rightsquigarrow 2$, takže pokud hráč zahraje do 0, odpověď bude v 0 (odpoví ve stejné hře). Pokud hráč zahraje ve hře H, potom druhý odpoví ve hře H (používá strategii ve hře H).

5 Třídy ekvivalence

Budeme říkat, že dvě hry jsou ekvivalentní, a budeme psát $G = H$, pokud součet $G + (-H) = 0$, tj. ve hře $G - H \rightsquigarrow 2$. Připomeňme, že $=$ používáme jako relaci ekvivalence, zatímco $\equiv$ označuje rovnost her jakožto množin.

Již víme, že $G = G$, protože $G + (-G) = 0$. Není těžké dokázat symetrii, tj. platí-li $G = H$, potom $H = G$, protože hry $G - H$ a $H - G$ se liší pouze znakem $-$. Pokud $G = H$ a $H = K$, potom $G + (-H) + H + (-K) = 0$, protože $-H + H = 0$, a tedy $G + (-K) = 0$, tj. $G = K$. Doplněním rovnosti $-H + H$ se rovnost nezmění.

Tímto způsobem máme definovanou relaci ekvivalenci a můžeme faktorizovat podle této ekvivalence na množině her.

Klasifikace her na 4 typy je korektně definována na třídách, nezáleží na reprezentantech. Jestliže $G + (-H) = 0$, potom v součtu $G + (-H) + H$ je možné dvěma způsoby dostat nulový výsledek, neměnící typ hry.

Budeme definovat relaci na dvojicích her $G \leq H$, pokud $G + (-H) \leq 0$ atd. Poznamenejme, že $G \leq H$ znamená také $H \geq G$ (vlastnost opačných her), což plyne z $H + (-G) \geq 0$. Odtud také získáme antisymetričnost: Pokud $G \leq H$ a $H \leq G$, potom

$G - H \leq 0$ a $H - G \leq 0$, tj. $G + (-H) \geq 0$ a $G + (-H) \leq 0$, současně a odtud také $G = H$.

Relace $\leq$ je také tranzitivní. To plyne z tvrzení: Je-li $G \geq 0$ a $H \geq 0$, potom $G + H \geq 0$. Jestliže druhý hráč má vyhrávající strategii ve hrách G a H, může také vyhrát v $G + H$. Jednoduše odpovídá (a používá svoji vyhrávající strategii) ve stejné hře, kde soupeř zahrál.

Tím ale máme na třídách her definováno preuspořádání a na třídách ekvivalence částečné uspořádání. Relace $\lhd\!\!\mid$ a $\mid\!\!\rhd$ jsou opačné (inverzní), a podobně pro $\leq$ a $\geq$. Relace $\parallel$ označuje neporovnatelnost (ve smyslu částečného uspořádání).

Dále platí: z $G \geq H$ a $H \mid\!\!\rhd H$, dostaneme $G \mid\!\!\rhd K$. Sporem, pokud $G \mid\!\!\rhd K$ neplatí, potom $G \leq K$ a díky tranzitivnosti také $H \leq K$, což je spor s předpokladem.

Dále platí z výše uvedeného, že ostrá relace $<$ je také tranzitivní. Dokažte samostatně!

Operace sčítání je korektně definována na třídách ekvivalence. Pokud $G = H$, potom $G + K = H + K$. Protože $G + K(-(H + K)) = G + K + (-H) + (-K)$ je rovno dvěma hrám $G + (-H)$ a $K + (-K)$, a obě jsou nulové podle předpokladu.

Následující tvrzení spojí hru s výsledným tahem v této hře. Pro libovolnou hru G platí nerovnosti $G^L \lhd\!\!\mid G \lhd\!\!\mid G^R$, pro libovolnou levou možnost G^L a libovolnou pravou možností G^R. Důkaz je opět indukcí a sporem. Předpokládejme, že $G^L \geq G$, tj. $G^L + (-G) \geq 0$, což znamená, že vyhraje levý, nezačíná-li ($R \rightsquigarrow L$). Pokud první hráč R zahraje do $-G^L$ (ve hře $(-G)$ je to dovolený tah), L hráč vyhraje ve hře $G^L + (-G^L)$, protože hraje jako první, což není možné. Podobně ve všech ostatních případech.

6 Čísla

Mezi všemi hrami jsou zajímavé podstruktury. Mezi těmito podstrukturami mají zvláštní důležitost čísla. Čísla se definují indukcí: Hra G je číslo, pokud:

1. Všechny L možnosti G^L jsou čísla,
2. všechny R možnosti G^R jsou čísla,
3. a platí $G^L < G^R$.

(Ostatně tyto vlastnosti očekáváme i u Dedekindových řezů racionálních čísel.)

Například hry $0, 1, -1, 2, \ldots$, definované dříve, jsou čísla. Jiným příkladem čísla je $\{0 \mid 1\}$. Bývá zvykem čísla označovat malými písmeny.

Dokázané tvrzení $G^L \lhd\!\!\mid G \lhd\!\!\mid G^R$ pro čísla můžeme zesílit na ostrou nerovnost. Dokážeme $x^L < x$. K tomu budeme uvažovat rozdíl $x^L - x$ a podíváme se, jak tato hra dopadne. Hra $x^L - x \equiv \left\{x^L - x^R, x^{LL} - x \,\middle|\, x^L - x^L, x^{LR} - x\right\}$. První typ levé možnosti této hry, díky definici čísla ($x^L < x^R$), je $x^L - x^R < 0$. Pokud odečteme nerovnosti $x^{LL} + x^L < 0$ (předpoklad indukce) a $x^L - x \lhd\!\!\mid 0$, dostaneme $x^{LL} - x \lhd\!\!\mid 0$. Tyto nerovnosti v levé části zaručují, že také platí $x^L - x \leq 0$. Protože platí $x^L \lhd\!\!\mid x$, nutně $x^L < x$. Analogicky se dokáže $x < x^R$.

Součet dvou čísel a opačné číslo je také číslo,

$$x + y \equiv \left\{x^L + y, x + y^L \;\middle|\; x^R + y, x + y^R\right\}$$

$$-x \equiv \left\{-x^R \;\middle|\; -x^L\right\}$$

Levé a pravé možnosti jsou čísla podle indukčního předpokladu a ostré uspořádání plyne z dřívějších důkazů.

Dříve definované uspořádání $\leq$ je na číslech lineární. V žádném případě nemůže v čísle x vyhrát první hráč. Kdyby $x^L \geq 0$ a $x^R \leq 0$, díky tranzitivnosti $x^L \geq x^R$, což není možné. Kdyby bylo pro dvě čísla $x \parallel y$, potom také $x - y \parallel 0$, což není možné ($x - y$ je číslo).

7 Zjednodušování her a čísel

Nechť je dána hra G a množiny her $\{H_L, \ldots\}$ a $\{H_R, \ldots\}$, přičemž $H_L \lhd\!\!| \; G$ a $G \lhd\!\!| \; H_R$. Potom hra $G' \equiv \left\{H_L, \ldots, G^L, \ldots \;\middle|\; H_R, \ldots, G^R, \ldots\right\}$, kde jsme doplnili levé a pravé možnosti, je ekvivalentní původní hře G. Z levé části můžeme odebrat všechny menší a z pravé všechny větší prvky (simplicity theorem).

Neformálně číslo $\{a \mid b\}$ je rovno nejjednoduššímu číslu, ležící v intervalu (a, b) tímto způsobem: Předpokládejme, že máme číslo s konečným počtem levých a pravých částí. Odstraníme v konečně mnoha krocích všechny malé a všechny velké zleva i zprava možnosti. Dostaneme $\{a \mid b\}$. Takové číslo je rovno číslu x. které je z intervalu (a, b) a žádná možnost není z tohoto intervalu.

Například víme, že $x \equiv \{0 \mid 1\}$ je číslo. Jeho hodnota leží v intervalu $(0, 1)$. Spočítáme $x + x \equiv \{0 + x \mid 1 + x\}$. Nejjednodušší číslo je z intervalu $(0, 2) \supset (0 + x, 1 + x)$ je $1 \equiv \{0 \mid\}$. Protože $0 \notin (0, 2)$. Proto také $x = \frac{1}{2}$.

8 Okruh krátkých čísel

Pro dvě čísla x, y definujeme součin takto:

$$x \cdot y \equiv \left\{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \;\middle|\; x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\right\}.$$

Motivace vychází z možnosti $(x - x^L) \cdot (y - y^L) > 0$ a podobně v ostatních případech. Platí: $xy = yx$, $0x = 0$, $1x = x$, $(-x)y = x(-y) = -(xy)$, $(x + y)z = xz + yz$, $(xy)z = x(yz)$.

Dokážeme třeba třetí tvrzení, $1 \cdot x \equiv \{0 \mid\} \cdot x \equiv \left\{0x + 1x^L - 0x^L \;\middle|\; 0x + 1x^R - 0x^R\right\} \equiv \left\{x^L \;\middle|\; x^R\right\} \equiv x$.

Formálně nemá cenu definovat součin obecně na hrách, protože záleží na ekvivalentních tvarech, například pro hry $2 \equiv \{1 \mid\} = \{0, 1 \mid\}$ a $* = \{0 \mid 0\}$ dostaneme z jedné strany $\{1 \mid\} \cdot x = \{* \mid *\} = 0$ a z druhé strany $\{0, 1 \mid\} \cdot x = \{0, * \mid 0, *\} \parallel 0$.

Indukcí je možné dokázat větu: Nechť x, x', y, y' jsou čísla, potom

1. xy je číslo,
2. jestliže $x = x'$, potom $xy = x'y$,
3. jestliže $x' < y$ a $y' < y$, potom $xy' + x'y < xy + x'y'$.

Hru nazveme krátkou, pokud má konečný počet možností tahů a všechny vedou do krátkých her. Poznamenejme, že součet a součin krátkých čísel je krátké číslo. Množina všech krátkých čísel je izomorfní s dyadickými racionálními čísly.

Protože $\frac{1}{2}$ je dyadické číslo, nutně $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ je podmnožinou krátkých čísel. Platí i obrácená inkluze. Mějme číslo $x = \frac{2m+1}{2^n}$, potom $x \equiv \left\{x - \frac{1}{2^n} \;\middle|\; x + \frac{1}{2^n}\right\}$. Indukce podle mocniny dvou. Je-li $n = 0$, potom $x \in \mathbb{Z}$, protože x je nejjednodušší v $\{x - 1 \mid x + 1\}$. Pokud $n > 0$, označme $z \equiv \left\{x - \frac{1}{2^n} \;\middle|\; x + \frac{1}{2^n}\right\}$ a uvažme součet $z + z \equiv \left\{2x - \frac{1}{2^n} \;\middle|\; 2x + \frac{1}{2^n}\right\}$. Díky indukci, $2x$ je nejjednodušší číslo z tohoto intervalu a tedy $2z = 2x$. Tedy věta platí.

9 Ordinály

Hru nazveme ordinálem, právě když neobsahuje pravou část a levá část je tvořena ordinály. Ordinály obvykle značíme řeckými písmeny. Některé vlastnosti ordinálů:

1. Každý ordinál je číslo.
2. Třída ordinálů, které jsou menší než předem daný ordinál, je množina.
3. Každý ordinál α je tvaru $\alpha = \{\beta \mid\}_{\beta<\alpha}$.
4. Pokud α je ordinál, potom $\alpha + 1 = \{\alpha \mid\}$ je ordinál.

Důsledek prvního tvrzení je, že součet a součin ordinálů je komutativní. Tímto způsobem máme fakticky mimo Dedekindovy řezy krátkých čísel k dispozici i ordinály podle von Neumanna. Některé vlastnosti ordinálů lze odvodit z vlastností her.

10 Dny narození

Budeme definovat den narození hry jako zobrazení z her do ordinálů takto:

$$b(G) = \left\{b(G^L), b(G^R) \;\middle|\; \right\}.$$

Podle definice je $b(G^L) < b(G)$, $b(G^R) < b(G)$, $b(-G) = b(G)$. Poznamenejme, že na ekvivalentních hrách b může být různé, např. $b(0) = 0 \neq b(\{-1 \mid 1\}) = 2$.

Hra G je krátká, pokud $b(G) < \omega$.

Doporučená literatura

[CGT] A. Siegel: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[LIP] M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*, A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA, 2007

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[TKH] *Úvod do teorie kombinatorických her*, `http://cgt.ic.cz/hs` (červenec 2011)

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[2hs03RMF actual froolov.tex, 28/12/14, 21:43]