Čísla a hry

Dominové dláždění a Padající domina

Václav Vopravil

Praha

hs@wopravil.cz

9. dubna 2024

O čem budeme dnes hovořit?

Seznámíme se s matematickou teorií, která

1. se zabývá některými hrami dvou hráčů,
2. ukáže, že tyto hry lze „sčítat",
3. zavede např. „kladné" hry,
4. speciální hry nazve čísla,
5. konečně odhalí, že tyto hry/čísla obsahují všechna reálná čísla, ale mnoho dalších nekonečně velkých a nekonečně malých čísel.

Zahrajeme si hry Dominové dláždění a Padající domino.

Přirozená čísla

Takto navrhuje konstruovat von Neumann (1923) přirozená čísla:

- $0 = \{\} = \emptyset$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- $\vdots$
- $n = (n-1) \cup \{n-1\} = \{0, 1, \ldots, n-1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \ldots, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \ldots\}\}$,
- $n + 1 = n \cup \{n\}$, tj. každé z nich je množinou všech menších (dříve vytvořených).

Lze také jako Zermelo $n + 1 = \{n\}$.

Obyčejná čísla (ordinální)

a jdeme dál

- $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,
- $\omega + 2 = \ldots$
- $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot 3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot \omega = \omega^2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots, \ldots, \ldots\}$,
- $\omega^\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots, \ldots, \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots, \ldots, \ldots\}$

$1 + \omega \neq \omega + 1$
$2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$
$1 + \omega = 2 + \omega$
$1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$
$(1 + 1) \cdot \omega \neq 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$

(1883 G. Cantor, 1906 Gerhard Hessenberg)

Nadreálná čísla

- Den 0: $0 = \{|\}$,
- Den 1: $-1 = \{| 0\} < 0 < \{0 |\} = 1$,
- 2. den:
  $-2 = \{| -1\} = \{| -1, 0\} = \{| -1, 1\} = \{| -1, 0, 1\}$
  $< -1 = \{| 0\} = \{| 0, 1\}$
  $< -\frac{1}{2} = \{-1 | 0\} = \{-1 | 0, 1\}$
  $< 0 = \{|\} = \{-1 |\} = \{| 1\} = \{-1 | 1\}$
  $< \frac{1}{2} = \{0 | 1\} = \{-1, 0 | 1\}$
  $< 1 = \{0 |\} = \{-1, 0 |\}$
  $< 2 = \{1 |\} = \{0, 1 |\} = \{-1, 1 |\} = \{-1, 0, 1 |\}$

A tak dále.

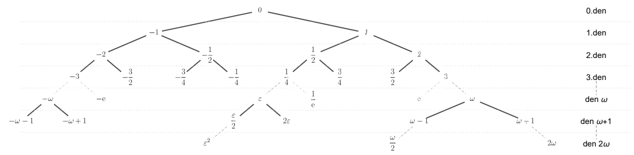
Nadreálná čísla

Je zachováno lineární uspořádání a každé číslo má svůj „den narození". Ve dnech s konečným počtem získáme dyadická racionální čísla.

- Den ω: všechna reálná čísla a různá čísla další ...:
- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots |\}, -\omega = \{| \ldots, -2, -1, 0\}$ — nekonečně velké
- $1/\omega = \{0| \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ — a nekonečně malé

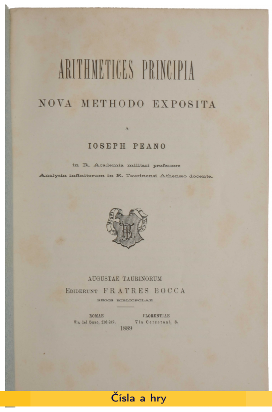
Ukazuje se, že tato označení mají smysl, když se podaří definovat binární operace + a − , relace $=, <$ atd.

Historie vzniku čísel



Intermezzo I.

Arithmetices Principia



ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

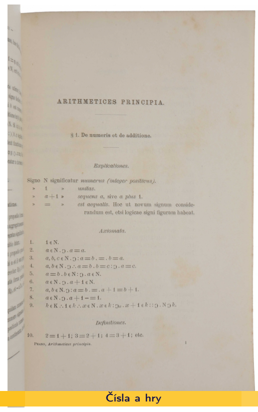
in R. Academia militari professore
Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenæo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM
EDIDERUNT FRATRES BOCCA
REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE Via del Corso, 216-217. FLORENTIAE Via Cerretani, 8.
1889

Intermezzo I.

Peanovy axiomy (1889)



ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus)*.
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a, sive a plus 1.*
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N.$
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N . \supset . a + 1 -= 1.$
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k.$

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

PEANO, *Arithmetices principia.* 1

Intermezzo I.

Peanovy axiomy (1889)

$1 \in \mathsf{N}.$

$a \in \mathsf{N} . \supset . a + 1 \in \mathsf{N}.$

$a, b \in \mathsf{N} . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$

$a \in \mathsf{N} . \supset . a + 1 -= 1.$

$k \in \mathsf{K} \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathsf{N} . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . \mathsf{N} \supset k.$

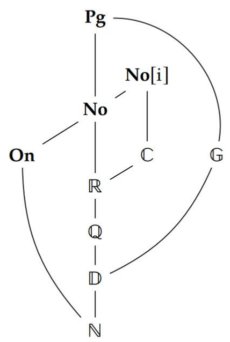
Intermezzo I.

Peanovy axiomy

Primitive Propositions

1. $1 \ \varepsilon N$
2. $+ \varepsilon N \backslash N$
3. $a, b \varepsilon N . a+ = b+ : \supset . a = b$
4. $1 - \varepsilon N +$
5. $s \varepsilon K . 1 \varepsilon s . s + \supset s : \supset . N \supset s.$

Intermezzo I.
Vnoření



Pg herní hodnoty
No nadreálná čísla
No[i] nadkomplexní čísla
On ordinální čísla
$\mathbb{G}$ krátké herní hodnoty
$\mathbb{R}$ reálná čísla
$\mathbb{C}$ komplexní čísla
$\mathbb{Q}$ racionální čísla
$\mathbb{D}$ dyadická racionální čísla
$\mathbb{N}$ přirozená čísla

Intermezzo II.
Dedekindovy řezy

Zatímco John von Neumann (1923) vytváří větší a větší čísla, Richard Dedekind (1858) se věnuje zaplňováním prázdných míst mezi racionálními čísly. Zatímco von Neumannův model používá vždy jednu množinu, Dedekind používá dvě. Můžeme si představit, že i u von Neumanna jsou dvě množiny, druhá je ovšem vždy prázdná. Dedekind ukázal, jak vyplnit mezery mezi racionálními čísly; Cantor ukázal, jak rozšířit (ordinální a kardinální) čísla nad rámec existujících konečných čísel. John Conway obě na tolik různé myšlenky spojil.
Připomeňme si definici Dedekindova řezu z dříve vytvořených racionálních čísel, kterou používá jedna z možných cest vytvoření reálných čísel $\mathbb{R}$ z racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

Definice

Dedekindův řez (L, R) se skládá ze dvou množin $L, R \subseteq \mathbb{Q}$, které jsou (disjunktní) neprázdné a takové, že $L \cup R = \mathbb{Q}$. Navíc každý prvek z L je menší než všechny prvky z R. Množina L neobsahuje největší prvek.

Intermezzo II.
Dedekindovy řezy

Nyní změníme definici řezu tak, že nebudeme požadovat vytvoření racionálních čísel. Výsledný definovaný objekt budeme nazývat nadreálné číslo.
▹ Množina L a množina R nemusí být množinami racionálních čísel. Místo toho vezmeme množiny dříve vytvořených nadreálných čísel.
▹ Když L a R nejsou podmnožinami $\mathbb{Q}$, nemá smysl trvat na podmínce $L \cup R = \mathbb{Q}$, tuto podmínku vynecháme.
▹ Nyní množiny L a R jsou dříve vytvořené množinami (nadreálných) čísel. Snazší cestu budeme mít, pokud nebudeme trvat na podmínce, že množiny L a R jsou neprázdné a nekonečné. Proto také odstraníme tyto dvě podmínky.
▹ Místo relace $<$ je zvykem pracovat s negativní verzí $\not\geq$.
▹ Konečně změníme zápis z (L, R) na $\{L \mid R\}$, abychom odlišili nadreálné číslo.
Dobrou představou je, že $x \equiv \{L \mid R\}$ představuje nejjednodušší číslo mezi prvky množiny L a množiny R.

Intermezzo III.
Motivace operací

Zajímavým problémem může být motivace zavedení sčítání, opačného prvku, násobení a převráceného prvku. Uvažte, že platí:

1. V reálných číslech platí $x' < x \Leftrightarrow x' + y < x + y$ i $y' < y \Leftrightarrow x + y' < x + y$ a podobně v ostatních případech.
2. V reálných číslech platí $x' < x \Leftrightarrow -x < -x'$ a $x < x' \Leftrightarrow -x > -x'$.
3. V reálných číslech platí: $x > x' \wedge y > y' \Rightarrow (x - x')(y - y') > 0 \Rightarrow xy > x'y + xy' - x'y'$ a podobně v ostatních případech.
4. V reálných číslech platí: $0 < \frac{1}{y}$ pro $y > 0$. Mimo to platí (opět pro reálná čísla) $0 < y' < y \wedge s' < \frac{1}{y} \Rightarrow (y - y')(\frac{1}{y} - s') > 0 \Rightarrow 1 - \frac{y'}{y} - ys' + y's' > 0 \Rightarrow \frac{1+(y'-y)s'}{y'} > \frac{1}{y}$ a podobně v ostatních případech.

Intermezzo III.
Motivace

John H. Conway měl skvělou intuici a vybral několik málo axiómů, které popisovaly celou teorii:

1. Tah z pozice do nové (jednodušší) pozice, poslední hráč po konečně mnoha tazích vyhraje.
2. V součtu her hráč může zahrát v libovolné komponentě.
3. Opačná hra je hra, kdy si hráči vymění role.
4. Pozice A je nejméně tak dobrá jako pozice B pro Levého hráče, pokud Levý hráč může B vyměnit za A v každém součtu.

Hry

Dříve zavedený zápis pro nová čísla pochází z jazyka světa kombinatorických her.

$$G = \{G^L | G^R\}$$

je pozice ve hře je množina možných pozic po tahu Levého a množinu možných pozic po tahu hráče pRavého. Ještě je třeba určit, který hráč začíná.

Obecné pozadí

1. Obecné pozadí: kombinatorické hry
   1. Definice
   2. Conwayova indukce
   3. Klasifikace her
   4. Sčítání her
   5. GRUPA her
2. Zvláštní druh her: nadreálná čísla
   1. Nadreálná čísla: definice
   2. Násobení čísel
   3. POLE čísel

Kombinatorická hra

Definice (Kombinatorická hra)

1. Nechť L a R jsou dvě množiny her. Pak uspořádaná dvojice $\{L \mid R\}$ je kombinatorická hra. Všechny hry vznikají tímto způsobem.
2. (Podmínka klesající hry) Neexistuje nekonečná posloupnost kombinatorických her $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} :\equiv (\{L_i \mid R_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ taková, že $\forall i \in \mathbb{N}, G_{i+1} \in L_i \cup R_i$.

- Možnosti: $L \cup R$
- Pozice: G a všechny pozice libovolné možnosti G

Příklady:

- $0 :\equiv \{|\}$
- $1 :\equiv \{0 \mid\}$
- $-1 :\equiv \{\mid 0\}$
- $* :\equiv \{0 \mid 0\}$

Conwayova indukce

Věta (Conwayova indukce)

Nechť P je vlastnost, kterou mají mít hry. Předpokládejme, že $\left\{G^L \mid G^R\right\}$ má vlastnost P, pokud všechny prvky z G^L a z G^R mají tuto vlastnost. Potom všechny hry mají vlastnost P.

Příklad

Ukažme, že pozice hry tvoří množinu.

$$\forall G \equiv \left\{G^L \,\middle|\, G^R\right\} P(G) : \text{Pozice hry } G \text{ tvoří množinu.}$$

$P(G)$ platí vždy, když platí $P(G^L)$ a $P(G^R)$. Conwayovou indukcí pak $P(G)$ platí pro libovolnou hru G.

Zobecnělá Conwayova indukce

Věta (Zobecnělá Conwayova indukce)

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ nechť P je vlastnost, kterou může mít libovolná n-tice her mít. Předpokládejme, že $P(G_1, \ldots, G_i, \ldots, G_n)$ platí vždy, když pro všechna $i \in 1, \ldots, n$ a pro všechny $G_i' \in L_i \cup R_i$ (kde $G_i \equiv \{L_i \mid R_i\}$), $P(G_1, \ldots, G_i', \ldots, G_n)$ platí. Pak $P(G_1, \ldots, G_n)$ platí pro každou n-tici her.

Třídy výsledků

Čtyři třídy výsledků:

1. Druhý hráč vyhrává, bez ohledu na to, kdo to je: $G = 0$
2. Vyhrává první hráč, bez ohledu na to, kdo to je: $G \parallel 0$
3. Vyhrává levý, bez ohledu na to, kdo začíná: $G > 0$
4. Vyhrává pravá strana, bez ohledu na to, kdo začíná: $G < 0$.

Uspořádání her

Definice (Uspořádání her)

Nechť G je hra. Pak:

1. $G \geqslant 0$, pokud neexistuje pravá varianta $G^R \leqslant 0$ hry G.
2. $G \leqslant 0$, pokud neexistuje levá varianta $G^L \geqslant 0$ z G.

Uspořádání her

Definice (Uspořádání her, třídy výsledků)

Tabulky výsledků:

	$L \rightsquigarrow L$	$L \rightsquigarrow R$
$R \rightsquigarrow L$	$\rightsquigarrow L$	$\rightsquigarrow 2$
$R \rightsquigarrow R$	$\rightsquigarrow 1$	$\rightsquigarrow R$

	$L \rightsquigarrow L$	$L \rightsquigarrow R$
$R \rightsquigarrow L$	$G > 0$	$G = 0$
$R \rightsquigarrow R$	$G \parallel 0$	$G < 0$

.

Součet her

Definice (Součet her)

Nechť G a H jsou dvě hry. Pak množina levých možností $G + H$ je:

$$\left(\bigcup_{i \in I}(G^{L_i} + H)\right) \cup \left(\bigcup_{i' \in I'}(G + H^{L_{i'}})\right)$$

a množina pravých možností $G + H$ je:

$$\left(\bigcup_{j \in J}(G^{R_j} + H)\right) \cup \left(\bigcup_{j' \in J'}(G + H^{R_{j'}})\right).$$

Příklad

$$1 + 1 \equiv \{0 \mid\} + \{0 \mid\} \equiv \{0 + 1, 1 + 0 \mid\}$$

Nyní:

$$0 + 1 \equiv \{\mid\} + \{0 \mid\} \equiv \{0 + 0 \mid\} \equiv \{\{\mid\} + \{\mid\} \mid\} \equiv \{\{\mid\} \mid\} \equiv \{0 \mid\} \equiv 1$$

a podobným způsobem získáme:

$$1 + 0 \equiv 1$$

Takže:

$$1 + 1 \equiv \{1, 1 \mid\} \equiv \{1 \mid\} \equiv 2$$

:

Opačná hra

Definice (Opačná hra)

Nechť G je hra. Pak:

$$-G \equiv \left\{(-G^{R_j})_{j \in J} \;\middle|\; (-G^{L_i})_{i \in I}\right\}$$

Příklad:

$$-1 \equiv \{\mid -0\} \equiv \{\mid -(\{\mid\})\} \equiv \{\mid \{\mid\}\} \equiv \{\mid 0\}.$$

Definice (Odčítání)

Nechť G a H jsou dvě hry. Pak definujeme:

$$G - H \equiv G + (-H).$$

Rovnost her

Definice (Rovnost her)

Nechť G a H jsou dvě hry. Pak: $G = H$ tehdy a jen tehdy, když $G - H = 0$.

Věta

Relace $=$ je relace ekvivalence.

Třídy ekvivalence stejných her

Věta

Ekvivalentní hry jsou ve stejné třídě výsledků.

Vlastnosti sčítání

Věta

1. *Je slučitelná s relací ekvivalence rovnosti: jestliže $G = G'$ a $H = H'$, pak $G + H = G' + H'$ a $G = -G'$.*
2. *Je asociativní: $(G + H) + K \equiv G + (H + K)$.*
3. *Je komutativní: $G + H \equiv H + G$.*
4. *Má $0 \equiv \{\mid\}$ jako nulový prvek $G + 0 \equiv G$.*
5. *Inverzní třída ekvivalence G je $-G$, pro všechny hry G.*

Věta

Třídy ekvivalence tvořené stejnými hrami tvoří aditivní Abelovu třídu GRUPA, ve které je nulový prvek reprezentován libovolnou hrou $G = 0$.

Věta

Pro libovolnou hru G a pro libovolnou levou variantu G^L a libovolnou pravou variantu G^R hry G:

$$G^L \lhd\!\mid G \lhd\!\mid G^R$$

Definice (Nadreálné číslo)

Nechť x je hra. Pak x je nadreálné číslo, jestliže všechny levé a pravé možnosti hry jsou nadreálná čísla, a jestliže pro všechny levé možnosti x^L a všechny pravé možnosti x^R x, pak platí

$$x^L < x < x^R.$$

Příklady

1. $0 \equiv \{|\}$ je číslo.
2. $1 \equiv \{0 \,|\}$ je číslo.
3. $-1 \equiv \{|\, 0\}$ je číslo.
4. $\omega \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots \,|\}$ je číslo.
5. $\frac{1}{2} :\equiv \{0 \mid 1\}$ je číslo.
6. ale $* \equiv \{0 \mid 0\}$ je hra, ale není číslo.

Násobení čísel

Chceme-li násobit:

1. Součin dvou čísel zůstal číslem.
2. Součin musí být distributivní pro sčítání.
3. Choval se podle očekávání při uspořádání.

Násobení čísel

Nechť x a y jsou dvě čísla. Pak: $\left\{ \begin{array}{l} x^L < x < x^R, \\ y^L < y < y^R. \end{array} \right.$ Protože chceme, aby xy zůstalo číslem, pak musíme zavést:

$$(xy)^L < xy < (xy)^R.$$

Násobení čísel

Tedy:

1. $\left\{ \begin{array}{l} (x - x^L) > 0 \\ (y - y^L) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x - x^L)(y - y^L) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{xy > x^L y + x y^L - x^L y^L}$.
2. $\left\{ \begin{array}{l} (x - x^R) < 0 \\ (y - y^R) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x - x^R)(y - y^R) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{xy > x^R y + x y^R - x^R y^R}$.

Násobení čísel

1. $\begin{cases} (x - x^L) > 0 \\ (y - y^R) < 0 \end{cases} \Rightarrow (x - x^L)(y - y^R) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{xy < x^L y + xy^R - x^L y^R}$.
2. $\begin{cases} (x - x^R) < 0 \\ (y - y^L) > 0 \end{cases} \Rightarrow (x - x^R)(y - y^L) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{xy < x^R y + xy^L - x^R y^L}$.

Násobení čísel

Věta

1. *Hra* $1 \equiv \{0\,|\}$ *je neutrální prvek pro násobení.*
2. *Hra* $0 \equiv \{|\}$ *je agresivní prvek pro násobení.*
3. *Třídy ekvivalence tvořené stejnými čísly tvoří abelovskou (POD)GRUPU her.*
4. *Násobení a dělení jsou slučitelné s ekvivalencí relací rovnosti.*
5. *Násobení je komutativní.*
6. *Násobení je asociativní a distributivní pro sčítání, když je považován za operaci na třídách ekvivalence čísel.*
7. *Pro každé číslo* $x \neq 0$ *existuje číslo* y *takové, že* $xy = yx = 1$.

Pole čísel

Věta

Třídy ekvivalence tvořené stejnými čísly tvoří úplně uspořádané pole, v němž je nulový prvek pro sčítání reprezentován libovolným číslem $x = 0$ *a neutrální prvek pro násobení je reprezentován číslem* $y = 1$.

Návrhy definic čísel

1. $n + 1 = \{n\,|\}$
2. $-n - 1 = \{|\,-n\}$
3. $n + \frac{1}{2} = \{n \mid n+1\}$
4. $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\,|\}$
5. $\varepsilon = \left\{0 \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \frac{1}{\omega}$
6. $\{\omega\,|\} = \omega + 1$
7. $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega\} = \omega - 1$
8. $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots\,|\} = 2\omega$
9. $\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots\,|\} = \omega^2$
10. $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \omega-1, \omega-2, \omega-3, \dots\} = \frac{\omega}{2}$
11. $\left\{0, 1, 2, 3, \dots \,\middle|\, \omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{4}, \dots\right\} = \sqrt{\omega}$
12. $\left\{0, 1, 2, 3, \dots \,\middle|\, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots\right\} = \varepsilon^\omega$
13. $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \sqrt[2]{\omega}, \sqrt[3]{\omega}, \sqrt[4]{\omega}, \dots\} = \log \omega.$
14. ...

Návrhy definic čísel s ε

1. $\frac{1}{\omega} = \varepsilon$
2. $\{0 \mid \varepsilon\} = \frac{\varepsilon}{2}$
3. $\left\{0 \,\middle|\, \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \frac{\varepsilon}{4}$
4. $\left\{0 \,\middle|\, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{8}, \dots\right\} = \varepsilon^2$
5. $\left\{\varepsilon \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = 2\varepsilon$
6. $\left\{2\varepsilon \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = 3\varepsilon$
7. $\left\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \sqrt{\varepsilon}$
8. etc.

- rakouský matematik H. Hahn (1907) studoval zobecnění formálních mocninných řad a německý matematik F. Hausdorff studoval některé uspořádané struktury. Oba spekulovali o 'nadreálných' číslech
- N. Alling (1962) navázal na Hahnovu práci, sestrojil třídu izomorfní s nadreálnými čísly. J. Conway na svou hravou teorii nadreálných čísel přišel na konci roku 1969 při sledování koncovek hry go. Conwayova konstrukce byla použita v románu D. Knutha (1974) Nadreálná čísla. Kniha je napsána ve formě dialogu a použila termín nadreálná čísla pro to, co Conway nazýval pouze čísla. Později Conway toto označení akceptoval. Mimo Knutha a Conwaye se intenzivně zabýval teorií S. Norton, M. Kruskal a H. Gonshor. Od výzkumů M. Kruskala nadreálná čísla měla všechny základní vlastnosti a operace reálných čísel, zahrnovala reálná čísla, mnoho typů nekonečen a nekonečně malých veličin. Kruskal studoval základy teorie, definování nadreálných funkcí a analýzu jejich struktur. Současně odkryl i spojitost s asymptotikou a exponenciální asymptotikou. Hlavní otázkou do konce 70. let byl výzkum problému, zda všechny nadreálné funkce mají určitý integrál. Na tuto otázku odpověděli kladně v roce 2015 Costin, Friedmann a Ehrlich. Jejich práce ukazuje, že pro dostatečně širokou třídu nadreálných funkcí existují určité integrály.

Všechny hry, které zde zkoumáme, jsou kombinatorické hry.
Kombinatorické hry (stručně hry) mají následující vlastnosti:

1. Hru hrají dva hráči, tradičně označovaní jako levý a pravý hráč. Hráči se v tazích střídají.
2. Pravidla hry stanovují možné tahy obou hráčů.
3. Oba hráči mají veškeré a stejné informace o hře.
4. Hra nemá žádný prvek náhody.
5. Hráč, který dosáhl koncové pozice, vyhrál. (Normální varianta hry.)
6. V každé hře je dovoleno pouze konečný počet možných pozic. Hra musí skončit po konečně mnoha tazích vítězstvím jednoho z hráčů a prohrou druhého z hráčů.

Mnoho známých společenských her nejsou kombinatorickými hrami, protože nesplňují jednu nebo více podmínek. Například karetní hra Černý Petr je založena na pravděpodobnosti, hráč zná své karty, ale ne protivníkovy karty.

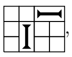
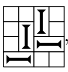
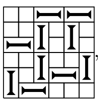
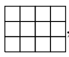
Hry, jako jsou šachy nebo dáma, nemají sice prvek náhody, ale mohou dopadnout s výsledkem pat, nebo dokonce nemohou dosáhnout koncové pozice.

I když některé hry nejsou kombinatorické, přesto je často možné nástroje teorie kombinatorických her po modifikaci použít pro jejich analýzu.

Hra Nim se hraje s několika hromádkami kamenů. Hru hrají dva hráči a v tazích se střídají. V každém tahu si hráč vybere jednu hromádku, a z ní odebere libovolný nenulový počet kamenů. Hráč který již nemůže zahrát (na hromádkách již nejsou kameny), prohrál. Je jednoduché se přesvědčit, že tato hra je kombinatorickou. Hra Nim se nazývá nestrannou, protože v každé pozici mají oba hráči na výběr stejnou množinu tahů.

Partyzánské hry umožňují oběma hráčům různé množiny tahů. Například hra Dominové dláždění je příkladem takové hry.[1] Hru hrají dva hráči s kostkami domina. Hráči hrají s kostkami domina na čtvercové síti, typicky 8×8. Hráči na tahu střídavě pokládají kostky domina na hrací plochu, tak, že kostka domina obsadí dvě vedle sebe čtvercová pole. Kostky se nesmějí křížit, ani obsazovat políčka vícekrát. Levý hráč pokládá kostky svisle (vertikálně) a pravý hráč vodorovně (horizontálně). Hra končí v okamžiku, kdy hráč nemůže umístit svou kostku. Tento hráč prohrál a jeho soupeř vyhrál.

Typická postavení ve hře po několika tazích mohou být:

, nebo , nebo , nebo , a pod.

[1] Göran Andersson, Domineering [WW, p. 115]; Dominoes [ONAG, p. 74]; nebo Cross-Cram [Gar74]

Hry mohou být definovány rekurzivně pomocí možností tahů z jednotlivých pozic do nových pozic, které hráči z dané pozice mohou udělat. Nechť G je hra v nějaké pozici bez znalosti, který z hráčů je právě na tahu. Hra $G = \{G^L \mid G^R\}$, kde G^L je množina všech možných nových pozic, které jsou dosažitelné jedním tahem levého hráče. Podobně G^R je množina všech možných her, které jsou dosažitelné jedním tahem z dané pozice pro pravého hráče. Tímto způsobem jsme definovali rekurzivně, v závislosti na možných tazích obou hráčů, hru. Podotkněme, že studujeme pouze tzv. krátké hry, kdy množiny G^L a G^R jsou konečné (mohou být i prázdné). Abychom se vyhnuli nepřehledným zápisům, dohodněme se, že místo množin budeme psát pouze výčet prvků. Symboly G^L a G^R použijeme raději pro tahy, než pro množiny.

Je vidět, že nejjednodušší hrou bude hra, ve které žádný z hráčů nemůže táhnout. Tato hra má obě množiny G^L a G^R prázdné. Tuto hru budeme zapisovat $0 \equiv \{|\}$ a nazývat nulou.

Dále budeme mít tři hry $\{0 \mid\}, \{\mid 0\}$ a $\{0 \mid 0\}$.

Těmto třem hrám po řadě přiřadíme symboly $1, -1$ a $*$. Později uvidíme motivace, pro označování her. Píšeme $0, 1, -1$ atp. pro čísla a pro nějaké nečíselné hry, typu $*$.

Ve shodě s Conwayem definujeme porovnávání her: Pro dvě hry G, H :

1. $G \geqslant H \Leftrightarrow$ žádná H^L není $\geqslant G$ a H není $\geqslant$ žádné G^R.
2. Píšeme $G \ngeqslant H$, pokud neplatí $G \geqslant H$.
3. $G \leqslant H \Leftrightarrow H \geqslant G$.
4. $G = H \Leftrightarrow G \geqslant H \wedge G \leqslant H$.
5. $G > H \Leftrightarrow G \geqslant H \wedge H \ngeqslant G$.
6. $G < H \Leftrightarrow H > G$.
7. $G \parallel H \Leftrightarrow G \ngeqslant H \wedge H \ngeqslant G$. Hry nazýváme fuzzy.
8. $G \lhd\!\mid H \Leftrightarrow G < H \vee G \parallel H$.
9. Podobně $G \mid\!\rhd H \Leftrightarrow H \lhd\!\mid G$.

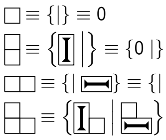
Upozorněme čtenáře, že negace $\ngeqslant$ a $<$ nemohou být zaměněny, jak je čtenář zvyklý, protože mohou být ve vztahu fuzzy. Tedy $\ngeqslant$ může být zaměněno $\lhd\!\mid$. Dále rovnost nás informuje, že hodnoty her jsou stejné. Je možné mít různé hry (s různými pozicemi), ale mohou být rovny podle naší definice.
Definice $\geqslant$ je opět rekurzivní, protože závisí na porovnání herních možností, táhnout do G^L, resp. do H^R. Protože každá hra skončí po konečně mnoha tazích, redukujeme počet otázek na členy levých a pravých částí na množiny prázdné. Proto je relace $\geqslant$ dobře definována.

Nyní zkontrolujeme oprávněnost našich předchozích označení, tj. $1, -1, *$ a 0. Například ukážeme, že platí $1 > 0$ pomocí předcházejících definic a označení her $0, 1$.

Dokázat $1 > 0$, znamená dokázat konjunkci $1 \geqslant 0$ a $0 \ngeqslant 1$. Podle definice $1 \geqslant 0$ znamená dokázat $0^L \ngeqslant 1$ a $0 \ngeqslant 1^R$. Protože 0^L neexistuje, nemůže ani být $\geqslant 1$. Podobně 1^R neexistuje. Stejnými argumenty dokážeme i druhou část konjunkce. Z těchto dvou případů také plyne, že $1 > 0$.

Použitím stejných argumentů můžeme dokázat očekávané vlastnosti $-1 < 0 < 1$. Pro hru $*$ máme $* > -1$, $* \parallel 0$ a $* < 1$.

Ve hře Dominové dláždění máme:



Věta

Pro všechny hry $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$ platí:

1. $G \ngeqslant G^R$
2. $G^L \ngeqslant G$
3. $G \geqslant G$
4. $G = G$.

Dokážeme všechna 4 tvrzení použitím indukce založené na dnech, kdy byly hry vytvořeny (kdy se hra narodila). Můžeme dokázat, že $0 \leqslant 0$ aplikací předcházejících definic. Nyní budeme předpokládat, že věta platí pro všechny $H \leqslant H$, pro všechny hry narozené dříve, než hra G.

1. Protože G^R se narodila dříve než hra G, dostaneme $G^R \leqslant G^R$ a z toho platí, že $G \ngeqslant G^R$.
2. Protože G^L se narodila dříve než hra G, dostaneme $G^L \geqslant G^L$ a tedy $G^L \ngeqslant G$.
3. Plyne jednoduše z 1 a 2.
4. Důsledek 3, protože $G \leqslant G \wedge G \geqslant G$.

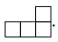
Sčítání her

Pro sčítání dvou her $G = \{G^L|G^R\}$ a $H = \{H^L|H^R\}$ může si hráč vybrat, který z nich bude hrát, a provede v něm tah, čímž se

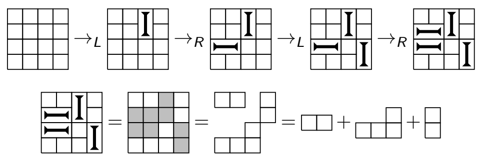
$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | G^R + H, G + H^R\}.$$

Hra $0 = \{|\}$ je neutrálním prvkem sčítání.
Nyní budeme definovat další operace na hrách. Opačnou hrou budeme definovat jednoduše vyměněním rolí levého a pravého hráče. Formálně pro hru $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$ dostaneme opačnou hru:

$$-G \equiv \left\{-G^R \,\middle|\, -G^L\right\}.$$

Ve hře Dominové dláždění, vyměníme-li roli levého a pravého hráče, dostaneme pro hru  hru otočenou o 90 stupňů hru .

Příklad partie:



Věta

Pro libovolnou hru G máme $G + (-G) = 0$.

Věta je intuitivně zřejmá. Protože co je dovoleno jednomu hráči v jedné hře, druhý hráč může odpovědět ve druhé komponentě, tedy $\rightsquigarrow 2$ a platí $=$.

I tento důkaz bude induktivní podle dne narození G.

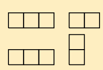
Dokázat $G + (-G) = 0$ znamená dokázat konjunkci $G + (-G) \leqslant 0 \wedge G + (-G) \geqslant 0$. Začneme s první částí indukcí: $G + (-G) \leqslant 0$ znamená, že $G^L + (-G) \ngeqslant 0 \wedge G + (-G)^R \ngeqslant 0$. První část konjunkce je ekvivalentní $G^L + (-G)^R$, což je $(G^L + (-(G^L)) \leqslant 0$, což platí díky indukci. V ostatních případech se postupuje analogicky. □

Tato věta nám dává možnost porovnávat hry, tedy zjistit, kdy jedna hra je ekvivalentní s druhou hrou. Pro libovolné dvě hry G, H, je-li pravdivé $G + (-H) = 0$, potom $G = H$. Druhou cestou je zahrát i hru $G + (-H)$ a ukázat, že $\rightsquigarrow 2$ (existuje vyhrávající strategie pro II. hráče). Potom $G = H$.

Příklad

$G + H$

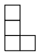
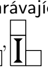
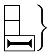
$G + (-H)$



Poznamenejme, že hry G a H mají stejnou hodnotu (jsou ty samé).
V každé hře je pouze po jednom tahu pro pravého hráče. Rovnost her je definována jako relace, což znamená možnost, že dvě různé hry budou ve vztahu $=$, ale ne ve vztahu $\equiv$.

Dříve nalezené věty mohou být zobecněny, aplikují-li se ostatní relace na dvě libovolné hry G, H. Důkaz je analogický a my ho zde vynecháme. Platí:

$$(G > H) \Leftrightarrow (G - H > 0)$$
$$G < H \Leftrightarrow G - H < 0$$
$$G \parallel H \Leftrightarrow G - H \parallel 0.$$

Intuitivní zápisy her jako čísla nám napovídají, jak moc tahů má za výhodu levý hráč. Soustředíme-li se pouze na celá čísla, uvidíme to zvláště jednoduše. Hra $0 \equiv \{|\}$ nemá výhodu pro žádného hráče. Hra $1 \equiv \{0\,|\}$ má pro levého jeden tah navíc a tato hodnota reprezentuje počet vítězných tahů (> 0). Podobně hra $\{|\,0\} \equiv -1$ je záporná a tato hodnota vyjadřuje počet vítězných tahů, které má výhodu pravý hráč. Také sčítání má jednoduchou interpretaci, např. ve hře $5 + (-2)$ levý hráč má výhodu 5 tahů, pravý 2. Protože se v tazích střídají, má levý výhodu 3 tahů a celkový výsledek je 3.
Samozřejmě hodnoty her mohou být komplikovanější. Ve hře $\frac{1}{2} \equiv \{0 \mid 1\}$ má levý výhodu půl tahu. To znamená, že ve dvou kopiích hodnota hry by měla být 1. K tomu jistě bude stačit přesvědčit se, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ a ukázat, že existuje vyhrávající strategie pro II. hráče. Tuto hodnotu má třeba hra  $=$ $\{$ ,  $\mid$  $\}$ $= \{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$.

Věta (Simplicity Rule)

Nechť $G = \{G^L \mid G^R\}$ je číslo. Nechť $G^L \lhd\!| \; x \lhd\!| \; G^R$, potom $G = z$, kde z je nejjednodušší číslo splňující nerovnosti $G^L \lhd\!| \; z \lhd\!| \; G^R$.

□

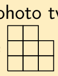
Toto pravidlo nám dává jednoduchou cestu nalézt kanonický tvar hry. Pravidlo říká, že pokud číslo patří mezi levou a pravou stranu, je hra rovna nejjednoduššímu číslu.

Nyní, když již máme vybudovanou představu, co jsou čísla, můžeme vyzkoušet nějaké hry, které nejsou takové. Hledáme z tak, aby platilo $G^L \lhd\!| \; z \lhd\!| \; G^R$. Uvažujme třeba pozici:  $=$ $\{$  $\mid$  $\}$ $= \{1 \mid -1\}$.
V této pozici existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. (Patří do $\mathcal{N}$.)
V tomto případě levá možnost je větší než pravá možnost. V této pozici oba hráči chtějí začínat a ještě jim zbyde jeden tah.

Definice

Převrácená hra je hra tvaru $\{x \mid y\}$, kde x, y jsou čísla a platí $x \geqslant y$.

Příklad

Hra $* \equiv \{0 \mid 0\}$ a hra $\{1 \mid -1\}$ jsou tohoto tvaru. Hra $*$ je nejjednodušší.
Ve hře Dominové dláždění konfigurace  má hodnotu $\pm\frac{3}{2}$.

Věta (Number Avoidance Theorem)

Je dán součet her. Hráč nezahraje do čísla, pokud nemusí (nemůže táhnout jinak).

Věta

Nechť $G = \{x \mid y\}$, kde x, y jsou čísla taková, že $x \geqslant y$. Potom pro libovolné z máme:

1. *je-li $z > x$, potom $z > G$*
2. *je-li $z < y$, potom $z < G$*
3. *je-li $y \leqslant z \leqslant x \Rightarrow z \parallel G$.*

□

Věta

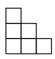
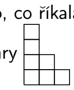
Pokud x, y a z jsou čísla a platí $x \geqslant y$, potom $\{x \mid y\} + z = \{x + z \mid y + z\}$.

Důkaz plyne okamžitě z věty 27 a definice disjunktního součtu. □

Věta

Pokud x, y jsou čísla, $x \geqslant y$, potom $\{x \mid y\} = u + \{v \mid -v\} = u \pm v$, kde $u = \frac{x+y}{2}$ a $v = \frac{x-y}{2}$.

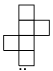
Plyne jednoduše z věty 29. □

Hra $\{1 \mid -1\}$ má označení $0 \pm 1 = \pm 1$. V případě třeba hry $\{2 \mid 0\} = 1 \pm 1$. Převrácenou hru tedy píšeme jako číslo $\pm$ hra. Intuitivně oba hráči budou chtít raději zahrát ve hře $\pm v$. To je také to, co říkala věta 27. Hodnota hry Dominové dláždění  $= \pm 1$, hodnota hry  $= 1 \pm 1$.

Definice

Hra G se nazývá infinitezimální právě tehdy, když platí $-z < G < z$, pro libovolné kladné číslo z.

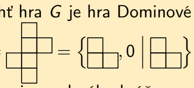
Triviální infinitezimální číslo je 0, jiné infinitezimální je star $* = \{0 \mid 0\}$.

Hra  je infinitezimální.

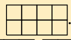
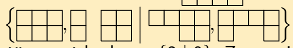
V teorii se nachází mnoho jiných infinitezimálních her, jako je třeba $\uparrow \equiv \{0 \mid *\}$, jinou hrou je třeba $\downarrow \equiv -\uparrow \equiv \{* \mid 0\}$. Infinitezimální mohou být < 0, > 0, $= 0$ nebo i $\parallel 0$.

Příklad

Nechť hra G je hra Dominové dláždění,

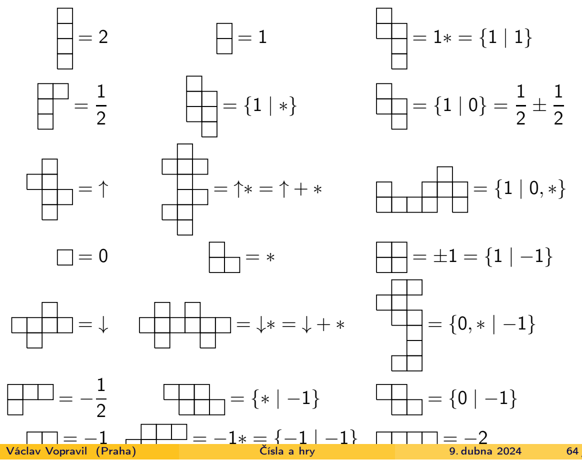
$G =$  $= \{*, 0 \mid *\}$. V této hře existuje vyhrávající strategie pro levého hráče a nezáleží na tom, který z hráčů začíná. To znamená, že platí $G > 0$. Levá $*$ je slabším tahem, než hra 0. Proto $\{*, 0 \mid *\} = \{0 \mid *\}$ Tato hra se nazývá up a píšeme $G = \uparrow$. Opačná hra je $\downarrow = \{* \mid 0\}$ se nazývá down. Tak jako $* = \{0 \mid 0\}$, hry $\uparrow$ a $\downarrow$ jsou nekonečně malé (infinitezimální).

Příklad

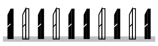
Nyní vypočteme hodnotu hry $G =$ . Po prvním tahu se hra rozpadne na . Druhá hra vlevo je lepší pro levého hráče a má hodnotu $\{2 \mid 0\}$. Zprava je situace komplikovanější, nejdříve spočteme druhou hru. Ta má hodnotu nula, protože začínající hráč prohraje. První pravá hra má hodnotu $\left\{0, -\frac{1}{2} \mid -2, *, \pm 1\right\} = \{0 \mid -2\}$. Pro hru G dostaneme $G = \{\{2 \mid 0\} \mid \{0 \mid -2\}, 0\} = \{\{2 \mid 0\} \mid 0\}$. Tuto hru nazýváme míny a píšeme $\mathbf{-}_2 = \{\{2 \mid 0\} \mid 0.\}$ Opačná hra se nazývá týny a platí $\mathbf{+}_2 = \{0 \mid \{0 \mid -2\}\}$.

Zajímavé vztahy mezi těmito hrami jsou tvrzení:

1. $\downarrow < \mathbf{-}_2 < 0 < \mathbf{+}_2 < \uparrow$, Porovnejte i $\mathbf{+}_2$ a $\mathbf{+}_3$!
2. $*$ je neporovnatelné (fuzzy) s $\downarrow, \mathbf{-}_2, 0, \mathbf{+}_2, \uparrow$, ale platí $\downarrow + \downarrow < * < \uparrow + \uparrow$
3. $\downarrow < *n < \uparrow$, ale $*n \parallel \mathbf{-}_2$ a $*n \parallel \mathbf{+}_2$ pro všechna $n \geqslant 2$.

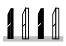


Hra Padající Domina, kterou zavedl Richard Nowakowski (2015), se hraje s bíLými a čeRnými kostkami domina jak ukazuje obrázek.

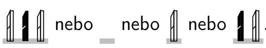


Obrázek: Typická pozice hry Padající Domina

Hráč na tahu vybere kostku domina své barvy a podle svého uvážení shodí kostky vlevo nebo vpravo. S padlými kostkami se již nehraje. Hraje se v normální variantě, tj. poslední hráč vyhraje. Např. z pozice



pRavý hráč (odebírá čeRné a shazuje jedním dovoleným směrem) táhne do pozice:



Padající Domina

je hra s řadami domina v čeRné, bíLé nebo šedé barvě. V každém tahu si aktuální hráč vybere buď šedé domino, nebo domino své barvy a směr buď doleva, nebo doprava. (Každý z hráčů si může vybrat libovolný směr.) Ve hře

provede L první tah a shodí čtvrté domino doprava. R provede druhý tah srazí druhou kostku domina doleva. Tah způsobí řetězovou reakci, která převrátí všechna domina bezprostředně vlevo nebo vpravo. Domino, které bylo svrženo, se na další hře nepodílí. Existuje několik variant hry Padající Domina. Pokud musí být všechna domina sražena stejným směrem, pak se jedná o hru Hackenstring. Jako obvykle hráč, kterému dojdou legální tahy, hru prohrává.

Hra Padající Domina je typická partyzánská kombinatorická hra. Je jednoduché zjistit, že řada stejných kostek domina má celočíselnou hodnotu, např.

$$= 5,$$

tj. Levý hráč má výhodu 5. Komplikovanější čísla vznikají na různobarevných řadách, např.

$$= \left\{ \ , \ \middle| \ \right\} = \{0, * \mid 1\} = \frac{1}{2}.$$

Vynecháváme možnosti, které se opakují díky levopravé symetrii a použili jsme, že $*$ je reverzibilní nebo spočtěte $\{0, * \mid 1\} - \frac{1}{2}$. Stejným postupem získáme i hodnoty postavení:

$$= \frac{1}{4} \text{ a } = \frac{1}{8} \text{ a } = \frac{3}{4}.$$

Každé dyadické racionální číslo x (tj. takové, že jmenovatel je mocnina dvojky) může být vyjádřeno jako pozice ve hře Padající Domina a to jednoduchou procedurou. Píšeme

$$x = \frac{m}{2^n}$$

ve zkráceném (v základním) tvaru (tj. m je liché) a označíme

$$y = \frac{m-1}{2^n} \text{ a } z = \frac{m+1}{2^n}.$$

Potom $x = \{x \mid y\}$ je v kanonickém tvaru.
Například je-li $x = 3/8$, potom $y = x - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ a $z = x + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.
Rekurzivně můžeme sestrojit i posloupnost kostek

$$Y = \ = \frac{1}{4} \text{ a } Z = \ = \frac{1}{2}$$

a doplníme tuto posloupnost o uprostřed takto:

$$= \ \cup \ \cup \ .$$

Výraz na pravé straně má hodnotu $\frac{3}{8}$.

Příklad partie hry:

$$\to_L \ \to_R \ \to_L \emptyset$$

$$\underbrace{\cdots}_{m+1}\underbrace{\cdots}_{n+1} = \{m \mid -n\}$$

$$\underbrace{\cdots}_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

Tedy všechna dyadická racionální čísla jsou nějaké pozice ve hře Padající Domina.

Pokud je v řadě n domin pro Levého a žádné pro pRavého hráče, pak je zřejmé, že hodnota řady je přesně n, protože Levý může začít svrhávat z nejlevějšího domina jedno po druhém (nalevo), což mu dává n volných tahů.
Další zajímavý příklad je následující: Proveďme analýzu této pozice:

$$\underbrace{\cdots}_{m}\underbrace{\cdots}_{n}.$$

Levý začíná: jeho nejlepším tahem je svrhnout všechna domina pRavého jediným tahem, přičemž mu zůstane $n-1$ vlastních domin. To dává $n-1$.
Pravá strana začíná: stejně tak je jejím nejlepším tahem vyvrátit všechna levá domina jediným tahem, čímž si ponechá $m-1$ vlastních domin. To dává $-(m-1)$. Výsledná hra je tedy $\{n-1 \mid -(m-1)\}$. Konkrétně při $m = n = 1$ je to $\{0 \mid 0\} = *$.

Další racionální herní hodnoty
Jak jsme viděli, jediné racionální hodnoty, kterých může krátká hra dosáhnout, jsou dyadické racionální hodnoty, tj. hodnoty $\frac{p}{2^n}$, pro nějaká celá čísla p a n. Pro krátké osvěžení si všimněte, že pozice Padajícího Domina se rovná $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, protože Levý se může táhnout na 0 a pRavý se může táhnout na 1. Dále uvažujme pozici . Zde je stále nejlepším tahem Levého tah na 0 a nyní je nejlepším tahem pRavého tah na . Proto má tato pozice hodnotu $\left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}$. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, zdá se, že $\underbrace{\cdots}_{2n}$ kopie střídavých dvojic a koncovky bílým dominem má hodnotu $\frac{1}{2^n}$. Dokažme to pomocí matematické indukce.

Věta

$\underbrace{\cdots}_{2n}$ *má hodnotu* $\frac{1}{2^n}$ *pro všechny hodnoty* $n \geqslant 0$.

Postupujeme indukcí podle n. První případ: . Pro náš základní případ jsme zvolili nejmenší možnou hodnotu. To je jednoduše pozice, která má hodnotu $1 = \frac{1}{2^0}$. Základní případ je tedy pravdivý.
Indukční předpoklad: Předpoklad $P(n)$ je pravdivý. Uvažujme pozici

$$\underbrace{\cdots}_{2(n+1)}.$$

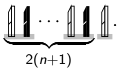
To je stejné jako

$$\underbrace{\cdots}_{2n}.$$

Vidíme, že nejlepším tahem L je vyklidit hrací desku a přesunout se na 0, zatímco R se může v nejlepším případě přesunout na pozici

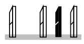
$$\underbrace{\cdots}_{2n}.$$

Z našeho indukčního předpokladu víme, že tato pozice má hodnotu $\frac{1}{2^n}$. Ve skutečnosti víme, že je to nejlepší tah pro R, protože podle našeho indukčního předpokladu jsou všechny ostatní možnosti větší. Proto,

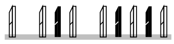


má hodnotu $\left\{0 \mid \frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Tvrzení je tedy pravdivé.
Pro každou kladnou celočíselnou mocninu $\frac{1}{2}$ jsme našli pozici Padajícího Domina.

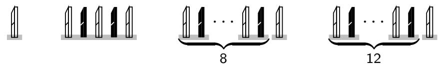
Pojďme dále: použijeme tuto konstrukci k nalezení naší první hry s racionální hodnotou, která není dyadická. Víme, že můžeme přidávat hodnoty pozic Padajícího Domina tak, že je jednoduše seřadíme za sebe s mezerou mezi nimi. (Využíváme součet her a lze si představit, že hra se hraje v několika řadách.) Například,



má hodnotu $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ a

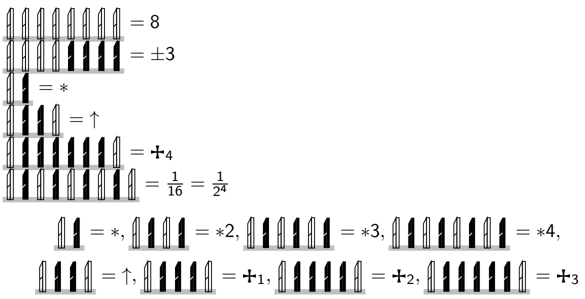


má hodnotu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Jistě si vzpomínáte na výpočet, že $\Sigma_{k=0}^{\infty} ar^k$ konverguje k hodnotě $\frac{a}{1-r}$ kdykoli, když $|r| < 1$. Co když tedy budeme uvažovat nekonečně dlouhý pás složený ze stále menších a menších ohodnocených pozic?



má hodnotu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$, což není dyadické.

Několik spočtených hodnot:



hs@wopravil.cz

http://www.wopravil.cz/hs

Je ještě nekonečně mnoho tvrzení, která jsou třeba ověřit, ale máme jen konečně mnoho času. . . (D. Knuth)