Omezení her

Václav Vopravil

1 Základní definice

Budeme vyšetřovat hraniční hry. Nejdříve zopakujeme základní definice, podrobnosti čtenář nalezne v [ONAG].

Uvažujeme hru $G \equiv \{L \mid R\}$, kde L a R jsou dvě množiny her. Píšeme $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$, kde G^L, resp. G^R, je typická levá (pravá) možnost tahů ve hře G.

Definice 1.1. Součet dvou her $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$ a $H \equiv \left\{H^L \mid H^R\right\}$ je definováno takto:

$$G + H \equiv \left\{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\right\}.$$

Definice 1.2. Opačná hra ke hře $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$ je hra

$$-G \equiv \left\{-G^R \mid -G^L\right\}.$$

Píšeme $G - H \equiv G + (-H)$.

Definice 1.3. Hra, ve které vyhraje druhý hráč, se nazývá nulová a označuje se 0.

Definice 1.4. Částečné uspořádání je definováno takto (viz [ONAG], str.78 pro další podrobnosti):
$G > H$ (G je větší než H) $\Leftrightarrow$ v $G - H$ existuje vyhrávající strategie pro levého hráče,
$G = H$ (G je ekvivalentní s H) $\Leftrightarrow$ $G - H$ je nulová hra,
$G < H$ (G je menší než H) $\Leftrightarrow$ v $G - H$ existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče,
$G \parallel H$ (G je fazy s H) $\Leftrightarrow$ v $G - H$ existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče.

Zápisem $G \geq H$ rozumíme, že hra G je větší nebo ekvivalentní hře H. Analogicky pro $\leq$. Zápisem $\not<$ rozumíme, že neplatí $<$ a analogicky ve všech ostatních případech.

Díky tomu, že ve hře $G - H$ existují pouze 4 možnosti, dostaneme, že mezi hrami G a H je možný právě jeden z výsledků:

$$G > H \text{ nebo } G = H \text{ nebo } G < H \text{ nebo } G \parallel H.$$

Definice 1.5. Říkáme, že hra G je kladná (záporná) právě tehdy, když $G > 0$ ($G < 0$). Pokud $G \parallel 0$, potom hru G nazýváme také fazy.

Spolu s uspořádáním definovaným výše, všechny hry (až na ekvivalenci) tvoří částečně uspořádanou komutativní grupu se sčítáním, odčítáním a s nulovým prvkem 0.

Definice 1.6. Hra G je v kanonickém tvaru, pokud neobsahuje bypass a dominující prvky (viz [ONAG], str. 111).

Definice 1.7. Hra G je číslo právě tehdy, když G^L, G^R jsou čísla a žádná dvojice možností tahů ve hře G nesplňuje podmínku $G^L \geq G^R$.

2 Narození her

Definice 2.1. Hra $0 \equiv \{|\}$ má narozeniny ve dne nula. Hra G má narozeniny ve dne $n \in \{1, 2 \ldots\}$, pokud hru zapíšeme v kanonickém tvaru a všechny možnosti mají nejvýše den narození $n-1$ a nejméně jedna hra má narození ve dne $n-1$.

Ve dne 1 vzniknou právě tři nové hry, a sice:

$$\{0 \mid\} \equiv 1, \{\mid 0\} \equiv -1 \text{ a } \{0 \mid 0\} \equiv *.$$

Ve dne 2 vznikne dalších 18 her, a sice:

$$\{0 \mid 1\} \equiv 2^{-1}, \{0 \mid -1\}, \{0 \mid *\} \equiv \uparrow, \{-1 \mid 0\} \equiv -2^{-1},$$

$$\{* \mid 0\} \equiv \downarrow, \{1 \mid 0\}, \{1 \mid -1\}, \{1 \mid\} \equiv 2, \{1 \mid 0, *\},$$

$$\{\mid -1\} \equiv -2, \{1 \mid *\}, \{0, * \mid 0, *\} \equiv *2, \{1 \mid 1\} \equiv 1*, \{0 \mid 0, *\} \equiv \downarrow*,$$

$$\{-1 \mid -1\} \equiv -1*, \{* \mid -1\}, \{0, * \mid 0\} \equiv \uparrow*, \{0, * \mid -1\}.$$

Nyní jsme připraveni se vyjádřit ke hranicím čísel (a her). Jedná se o omezení, do určité míry maximální (minimální) prvky v jednotlivých dnech. Není překvapivé, že ve dne n pro čísla hraniční body jsou zajímavá přirozená n a zlomky 2^{1-n}. Pro hry jsou zajímavé právě hry $+_n$ a hry $n \bullet \uparrow$, resp. $n \bullet \uparrow*$.

3 Omezení čísel

Pro dny $n \in \mathbb{N}$ lze ukázat (a je to celkem zřejmé), že největší hra narozená ve dne n je právě n.

Věta 3.1. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je největší hra narozena dne n právě n.*

Důkaz: Použijeme indukci podle n. Věta platí pro $n = 0, 1, 2$. Budeme předpokládat, že také věta platí pro n. Předpokládáme dále, že hra G se narodila ve dne $n+1$. Tvrdíme nyní, že $G \leq n+1$. Kdyby tomu tak nebylo, pokud by pravý hráč začínal, mohl by vyhrát ve hře $n+1-G$. Protože celé kladné číslo v kanonickém tvatu nemá pravou možnost, znamená to, že pro nějakou levou možnost hry G, tj. G^L, dostaneme

$$n + 1 - G^L \not\geq 0.$$

což je v rozporu s indukční hypotézou, protože G^L má narozeniny nejvýše v $n$tý den.

Jako snadný důsledek našeho výsledku je fakt, že pokud hra G se narodila $n$tého dne nebo je mladší, nutně $-n \leq G \leq n$.

$\square$

Z prvních dnů můžeme usoudit, že nejmenší kladná čísla jsou $1, 1/2, \ldots$ Pro ostatní konečná čísla dostaneme tuto větu:

Věta 3.2. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nejmenší kladné číslo narozené dne n je 2^{1-n}.*

Důkaz: Víme, že věta platí pro $n = 1, 2$. Nechť G je kladné číslo narozené dne $n+1$ a G je v kanonickém tvaru. Předpokládejme, že $G \ngeq 2^{-n}$. Potom pravý hráč, začíná-li, může vyhrát ve hře $G - 2^{-n}$. Tedy hra G je kladná a $-2^{-n} = \{-2^{1-n} \mid 0\}$, dostaneme $G^R - 2^{-n} \ngtr 0$, pro nějakou pravou možnost hry G. To je ale v rozporu s indukční hypotézou, a to sice, že hra G^R má narozeniny nejvýše v den n. Poznamenejme, že jsme předpokládali, že hra G je v kanonickém tvaru a kladné číslo, a tedy G^R musí být nutně také kladné číslo. $\square$

4 Omezení pro infinitezimální

Nyní se soustředíme na infinitezimální hry. Kladná hra G se nazývá infinitezimální hra, pokud splňuje nerovnost $-\delta < G < \delta$, pro každé kladné číslo δ. Dne 0 se není žádné číslo infinitezimální. Dne 1 vznikne $* \equiv \{0 \mid 0\}$, která není kladná ($*$ je fazy). Druhého dne vznikne jedna kladná hra $\uparrow \equiv \{0 \mid *\}$, která je infinitezimální.

Náš další výsledek spočívá v tom, že budeme charakterizovat nejmenší takovou hru, pro každý konečný den narození.

Věta 4.1. *Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ nejmenší kladná hra narozena ve dne n je*

$$+_{n-2} \equiv \{0 \mid \{0 \mid 2-n\}\}.$$

Důkaz: Pro $n = 2$ nejmenší kladná hra narozena ve dne n je $+_0 = \uparrow$. Do dne dva máme celkem 22 her a úplným výčtem můžeme tvrzení ověřit.

Předpokládejme, že náš výsledek platí i pro všechny narozeninové dny nejvýše $n-1$ dne. Nechť kladná hra G se narodila ve dne n.

Předpokládejme, že $G \ngeq +_{n-2}$. To znamená, že pokud pravý začíná, může vyhrát ve hře $G + \{\{n-2 \mid 0\} \mid 0\}$. Protože G je kladná, dostaneme nutně, že pro nějakou pravou možnost hry G platí $G^R + \{\{n-2 \mid 0\} \mid 0\} \leq 0$, což znamená, že pravý hráč když nezačíná, může vyhrát ve hře $G^R + \{\{n-2 \mid 0\} \mid 0\}$. Zejména platí $G^R + \{\{n-2 \mid 0\} \mid 0\} \ngeq 0$. Potom tedy musíme mít nějakou pravou možnost hry G^R, tj. G^{RR}, takovou, že $G^{RR} + n - 2 \ngeq 0$, což je ale v rozporu s větou 3.1, protože G^{RR} se narodila ve dne, nebo dříve, $n-2$. $\square$

Z našeho výčtu 22 her vzniklých do dne 2 si můžeme všimnout, že hry $n \bullet \uparrow$ a $n \bullet \uparrow *$ jsou největší infinitezimální ve dne nejvýše $n+1$.

Připomeňme, že kanonický tvar těchto her (viz [WW], vol.1, str. 73) je

$$n \bullet \uparrow \equiv \{0 \mid (n-1) \bullet \uparrow *\} \text{ a } n \bullet \uparrow * \equiv \{0 \mid (n-1) \bullet \uparrow\}.$$

Platí věta:

Věta 4.2. *Nechť G je hra, která se narodila nejvýše $n+1$ dne (pro $n \in \mathbb{N}$). Potom platí nejméně jedna z následujících možností*

1. $G \leq n \bullet \uparrow$,
2. $G \leq n \bullet \uparrow *$,
3. $L(G) \geq 2^{1-n}$, *nebo*
4. $G = 2^{-n}$,

kde $L(G)$ je levý stop hry G.

Doporučená literatura

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[CGT] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)

[2hs03RMF actual bounds.tex, 30/08/14, 13:02]