1 Teorie her

Budeme se zabývat pouze speciálními kombinatorickými hrami, tzv. nestrannými hrami dvou hráčů s úplnou informací, tj. oba hráči v každém okamžiku hry mají všechny informace o možných tazích obou hráčů a jsou nezávislé na tom, který z hráčů je právě na tahu. V každé pozici oba hráči mají na výběr stejnou množinu tahů.

V následujícím označujeme I. prvního hráče (hráč, který začíná) a hráče II. jeho soupeře.

Terminologie:
Vyhrávající strategie: Algoritmus, který zabezpečí vítězství.
Normální hra: Ve hře vyhraje hráč který udělal poslední tah.

Příklad 1.1. (Symetrický Nim) Jsou dány dvě hromádky o n kamenech. Střídavě hráči I. a II. odebírají kladný počet kamenů z nějaké hromádky. Hraje se v normální variantě. Který z hráčů má vítěznou strategii a tuto strategii nalezněte.

Řešení: V obou hromádkách je stejný počet kamenů n. Druhý z hráčů má vyhrávající strategii, II. z hráčů kopíruje tahy I. hráče, protože při každém kole je možné zahrát svůj tah tak, aby obě hromádky měly stejný počet kamenů. Po nejvýše n krocích (tazích) musí hráč odebrat z nějaké hromádky poslední kámen a druhý hráč odebere ze zbývající hromádky poslední kámen a vyhrává.

1.1 Symetrie

Příklad 1.1 ukazuje nejzákladnější ze všech herních strategií, tj. použití symetrie. Obecně platí, že v normální symetrické hře má II. hráč vyhrávající strategii, protože může napodobit tahy I. hráče. Použití této strategie ukáže i následující hra barvení.

Příklad 1.2. K dispozici máme pravidelný $2n$ úhelník. Hráči střídavě označují úhlopříčky tak, že vybraná úhlopříčka nesmí protínat dříve vybranou úhlopříčku. Který z hráčů má vyhrávající strategii a jak bude hrát?

Řešení: První z hráčů má vyhrávající strategii. Ve svém prvním tahu označí hlavní diagonálu a rozdělí pravidelný $2n$ úhelník na dvě symetrické části. Nyní se již hrají dvě disjunktní hry a co je dovoleno jednomu z hráčů v jedné části hry, je dovoleno druhému hráči ve druhé části hry druhému z hráčů a tak hráč může kopírovat tahy soupeře.

Poznámka 1.3. Některé hry jsou symetrické, jiné je možné nějakým obratem k symetrii dovést. Zbylé hry nejsou symetrickými.

Použijeme další obecnou strategii a to označování. Následující příklad ilustruje princip $\mathcal{N}/\mathcal{P}$ rozkladu, který patří v celé teorii k nejdůležitějším.

Příklad 1.4. (Hra pNim) Hra s odebíráním předmětů, lze odebírat jeden kámen nebo počet kamenů, který je prvočíslo.

Je-li n počet kamenů na hromádce, je možné odebírat vždy pouze prvočíselný počet nebo jeden kámen. Takže nová pozice je buď $n-p$ nebo $n-1$. Pozice P s n kameny $P(n)$ je buď vyhrávající nebo prohrávající pro prvního hráče. Je-li vyhrávající, označíme ji $\mathcal{N}$, v opačném případě $\mathcal{P}$. Například pozice pro $n = 1, 2, 3$ jsou vyhrávajícími, protože jedním tahem můžeme odebrat všechny kameny. Pozice $n = 0$ je prohrávající, protože I. hráč nemůže táhnout. Zbylá pozice $n = 4$ je prohrávající, protože všechny možné tahy vedou pouze do vyhrávajících pozic. Následující pozice $n = 4 + 1, 4 + p$ jsou opět vyhrávající pozice. Neoznačena pozice je $n = 8$. Protože všechny tahy z $P(8)$ vedou pouze do vyhrávajících pozic, je tato pozice prohrávající, atd. Stejná situace nastane, dojdeme-li k $n = 12$ nebo 16. Rýsuje se zde hypotéza, že pro $n = 4k$ je pozice $\mathcal{P}$ prohrávající, a zbylé pozice jsou $\mathcal{N}$ vyhrávající. Dokázat hypotézu můžeme třeba indukcí, budeme-li předpokládat, že toto pravidlo platí pro všechna přirozená čísla až do $4k$. Pozice $4k+1, 4k+2, 4k+3$ jsou vyhrávající pozice $\mathcal{N}$, protože jedním tahem se můžeme dostat do prohrávající pozice odebráním $1, 2$ nebo 3 kamenů. Aby pozice s $4k+4$ kameny byla také vyhrávající, museli bychom se dostat jedním tahem do nějaké prohrávající pozice. Tyto pozice jsou ale násobky 4 a tedy nejsou prvočísla, tedy nutně pozice $4k+4$ je prohrávající pozice, což bylo třeba dokázat (lze odebrat pouze násobek 4). Všimneme si ještě jedné vlastnosti. Máme-li nějakou prohrávající pozici $\mathcal{P}$, potom všechny následující o jednu, nebo prvočíslo p jsou vyhrávajícími pozicemi $\mathcal{N}$, což nám připomene Eratosthenovo síto. V normální variantě hry koncové pozice jsou označeny $\mathcal{P}$. Tento algoritmus nazýváme *značkovacím algoritmem*. Obvykle se značkovací algoritmus používá takto: vyšetří se koncové pozice a zváží se nejmenší možné situace. Zpětnou indukcí se dedukuje, které tahy vedou k prohře a tam se začíná s výstavbou, nalézají se první vyhrávající a prohrávající strategie a následuje zobecnění.

Úloha 1.5. (Hra p^nNIM) Hra s odebíráním předmětů, lze odebírat jeden kámen nebo počet kamenů, který je nějakou mocninou prvočísla p.

Příklad 1.6. (Hra NIM$[3, 2, 1]$)

Který z hráčů má vyhrávající strategii? Tuto strategii nalezněte.

Koncová pozice NIM$[0, 0, 0]$ se označí jako $\mathcal{P}$. Všechny pozice (4! prvků) rozdělíme na $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$. Pozice NIM$[0, 0, 0]$, NIM$[1, 1, 0]$, NIM$[1, 0, 1]$, NIM$[0, 1, 1]$, NIM$[2, 2, 0]$, NIM$[3, 2, 1] \in \mathcal{P}$. Vyhrávající strategii má II. hráč.

Poznámka: Postup $\mathcal{P}/\mathcal{N}$ je sice univerzální, ale nepomůže nám rozpoznat zákonitost. Seznam rozkladu může mít mnoho položek a vyžaduje vyšetřovat mnoho situací (*brute force*).

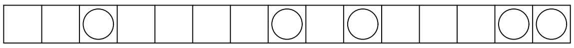
Příklad 1.7. (Bachetova hra) Buď $k, n \in \mathbb{N}$; $k \leq n$ pevně. Na stole leží n kamenů. Hráči střídavě odebírají j kamenů $1 \leq j \leq k$. Hraje se opět normální varianty. Který z hráčů vyhraje?

Nápověda: Řešte nejdříve jednodušší varianty, např. speciální případy pro $k = 4$ a $n = 10, 14$. Potom výsledky zobecněte. Vždy předpokládejte, že oba hráči hrají optimálně a hledejte prohrávající pozice $\mathcal{P}$. Zpětnou indukcí získáte, že pro $k = 4$ pozice násobků 5 jsou prohrávající.

Úloha 1.8. (Northcottova hra) (tato hra sice není nestrannou, ale může se analyzovat jako nestranná): Základní postavení: Hraje se na šachovnici s bílými a černými pěšci, v každém řádku je po jednom černým a jednom bílým pěšci. Bílý hráč tahá s bílými figurami, černý s černými. Pravidla: Pěšci mohou táhnout vpřed i vzad, ale nesmí se přeskakovat. Musíte přesunout jednu z vašich figurek na jiné volné místo v téže řadě. Koncová pozice, vyhrává: hráč, který táhne jako poslední. (Návod: Všimněte si políček mezi kameny!).

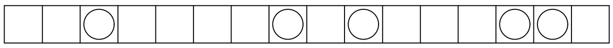
Úloha 1.9. (Kayles) Hráč na tahu vybere jednu, nebo dvě sousedící v jednom řádku, kuželky. Hráč, který odebere poslední kuželku vyhrál.

Úloha 1.10. Mince: Hraje se na proužku čtverečků, jako na obrázku. Proužek papíru obsahuje mince v jednotlivých polích. Hráči se střídají v tazích, v každém tahu hráč může posunout minci o libovolný počet polí vlevo. Prohraje hráč, který nemůže již minci přesunout.



Úloha 1.11. Na stole leží dvě hromádky kamenů. V každém tahu hráč může odebrat libovolný počet kamenů z jedné hromádky nebo stejný počet kamenů z obou současně. Hra se hraje v normální variantě. Nalezněte algoritmus pro nalezení všech prohrávajících pozic.

Úloha 1.12. (Stříbrný dolar a dědictví) Na počátku hry stříbrný dolar nebo dědictví se zvolí počet kamenů (3 až 8) a kameny se umístí na proužek políček 1, 2, ..., 16, vždy ale na poli leží nejvýše jeden kámen. Tahem je posunutí libovolného kamenu vlevo na prázdné pole. Ve variantě stříbrný dolar není možné kameny přeskakovat, zatímco u varianty dědictví můžeme kameny přeskakovat. Hra končí, pokud hráč již nemá tah; kdo provede pravidly povolený tah jako poslední, vyhrál.



Doporučená literatura

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[CGT] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)

[2hs03RMF actual aigner.tex, 30/08/14, 12:44]