---

(1)TODO: K!, Wolfe chybí

---

1 Úlohy

Úloha 1.1. Uvažujme následující modifikaci hry s odčítáním. Pozicí ve hře je jedna nebo více hromádek kamenů. Dovolenými tahy jsou (1) odebrat jeden kámen z jedné hromádky, nebo (2) rozdělit hromádku se sudým počtem kamenů na dvě stejné hromádky. Nalezněte Sprague–Grundyovy hodnoty hromádky s n kameny.

Řešení: Začneme počítat Sprague–Grundyovy hodnoty z počátečních konfigurací
ad (1) $\mathcal{G}(x) = \text{mex}\{\mathcal{G}(x-1)\}$, je-li x liché,
ad (2) $\mathcal{G}(x) = \text{mex}\{\mathcal{G}(x-1), \mathcal{G}(x/2) \oplus \mathcal{G}(x/2)\} = \text{mex}\{\mathcal{G}(x-1), 0\}$, je-li x sudé.

Hodnoty zapíšeme do tabulky:

x	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
$\mathcal{G}(x)$	0	1	2	0	1	0	1	$\ldots$

od tří a výše se hodnoty $\mathcal{G}(x)$ střídají a to $0, 1 \ldots$
$\mathcal{G}(k) = 0$, pro $k \geq 3$, je-li k liché
$\mathcal{G}(k) = 1$, pro $k \geq 4$, je-li k sudé.
Důkaz indukcí: Předpokládejme, že formule platí pro $\mathcal{G}(3), \mathcal{G}(4), \ldots, \mathcal{G}(k-1)$ a ukážeme, že formule platí i pro $\mathcal{G}(k)$. Je-li k liché, potom $\mathcal{G}(k) = \text{mex}\{\mathcal{G}(k-1)\} = \text{mex}\{1\} = 0$. Je-li k sudé, potom $\mathcal{G}(k) = \text{mex}\{\mathcal{G}(k-1), 0\} = \text{mex}\{0, 0\} = 1$. Díky indukci tvrzení platí.

Úloha 1.2. Nalezněte nim součet 29 a 14; $13, 19$ a 23. Určete x tak, aby $22 \oplus x = 7$.

Úloha 1.3. Nalezněte Sprague–Grundyovy hodnoty hry s odčítáním, je-li $S = \{1, 3, 6\}$ nebo $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ (mocniny 2). Své závěry dokažte!

Úloha 1.4. (Grundyova hra)

1. V Grundyově hře je dovoleno rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky s různým počtem kamenů. Koncové pozice jsou hromádky s žádným, jedním, nebo dvěma kameny. Vypočítejte Sprague–Grundyovy hodnoty hromádky s n kameny, je-li $n = 1, 2, \ldots, 13$.

2. Z pozice $G[6, 9, 13]$ jsou možné 4 vítězné tahy. Tahy nalezněte a své tvrzení zdůvodněte!

Úloha 1.5. Uvažujme následující variantu hry NIM se třemi hromádkami. Jsou dány tři hromádky se $5, 6$ a 7 kameny. V každém tahu je možné odebrat jeden až tři kameny (vždy ale pouze z jedné hromádky). Určete Sprague–Grundyovy hodnoty počátečního stavu hry (pozice hry). Pro kterého z hráčů existuje vyhrávající strategie?

Úloha 1.6. Uvažujme následující hru dvou hráčů: Na tabuli jsou napsaná přirozená čísla od 1 do 7. Hráči se střídají v tazích, v každém tahu smažou nějaké číslo a také všechny jeho dělitele. vyjádřete tuto hru ve tvaru acyklického grafu a spočítejte Sprague–Grundyovy hodnoty všech jeho vrcholů. Pro kterého z hráčů existuje vyhrávající strategie?

Úloha 1.7. Uvažujme následující hru pro dva hráče. na stole leží n hromádek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kamenů. V jednom tahu je možné odebrat $1, 2$ nebo 6 kamenů z jedné hromádky. Hra končí, když na hromádkách není žádný kámen. Hráč, který zahrál jako poslední, vyhrál.

1. Nalezněte $\mathcal{G}(x)$ – Sprague–Grundyovu funkci pro hromádku s x kameny, kde x je přirozené číslo. Svůj závěr dokažte!
2. Uvažujme pozici $x_1 = 5, x_2 = 9, x_3 = 13$. Ukažte, že tato pozice je vyhrávající (pro prvního hráče) a nalezněte všechny vyhrávající tahy z této pozice.

Úloha 1.8. V nadreálných číslech platí $\{1/2\ |\} = 1 = \{0\ |\} = \{\{|\}\ |\}$, Obecně, je-li a reálné nezáporné číslo, potom $\{a\ |\} = \{\lfloor a \rfloor\ |\} = \lfloor a \rfloor + 1$, kde $\lfloor a \rfloor$ je celá část a. Je-li a záporné číslo, potom $\{a\ |\} = \{|\} = 0$. Vyslovte také obdobné tvrzení pro pravou část hry.

Úloha 1.9. Hraje se taková hra: Je dáno několik nenulových hromádek kamenů. Tahem lze rozdělit libovolnou hromádku na dvě neprázdné hromádky. Vyhrávající hráč udělal poslední tah. Koncová pozice je několik hromádek s jedním kamenem na každé. Vypočítejte Sprague–Grundyovu posloupnost této hry a pomocí této posloupnosti, které počáteční pozice jsou vyhrávající pro prvního hráče. Svůj závěr dokažte!

Úloha 1.10. Nalezněte průměr, teplotu a nakreslete termograf her:

1. $\{4 \mid -3\}$
2. $\{\{7 \mid 3\} \mid -1\}$
3. $\{-1 \mid \{-4 \mid -8\}\}$

4. $\big\{\{5 \mid 1\}, 2 \mid \{-2 \mid -4\}, -2\frac{1}{2}\big\}$.

Úloha 1.11. Dva hráči hrají hru s odebíráním kamenů, $S = \{2, 5, 6\}$ na třech hromádkách $7, 8, 9$ kamenů. Kdo vyhraje tuto hru? Jaký je nejlepší první tah?

Řešení: Substrakční hra $S = \{2, 5, 6\}$ má nim posloupnost 00110213021 s periodou 11. Tedy na těchto hromádkách $7, 8, 9$ kamenů kamenů, dostaneme $\bullet 3 + \bullet 0 + \bullet 2 = \bullet 1$ a tedy existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Jako nejlepší tah je odebrání 2 kamenů z hromádky o velikosti 7, protože potom dostaneme $\bullet 2 + \bullet 0 + \bullet 2 = \bullet 0 = 0$.

Úloha 1.12. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 4, 7, 8\}$. Jakou periodu má tato posloupnost?

Řešení: Nim sekvence je 00112203142 délky 11.

Úloha 1.13. Hra NIM$[3, 7, 10, 11]$. Nalezněte hodnotu hry a nalezněte vyhrávající tah pro prvního hráče!

Řešení: $3 \oplus 7 \oplus 10 \oplus 11 = 2 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1 = 4 \oplus 1 = 4 + 1 = 5 \neq 0$, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče.

$3 \oplus 5 = 1 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 4 = 6 (> 3)$ nelze, chceme odebírat
$7 \oplus 5 = 4 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 1 = 2$
$10 \oplus 5 = 8 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 4 (> 10)$ nelze, chceme odebírat
$11 \oplus 5 = 8 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 1 > 11$, nelze, chceme odebírat.

Úloha 1.14. NIM$[3, 6, 8, 9]$

Řešení: $3 \oplus 6 \oplus 8 \oplus 9 = 1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 = 4 \neq 0$; existuje vyhrávající strategie pro I. hráče

$3 \oplus 4 = 7 > 3$, nelze
$6 \oplus 4 = 2 \ldots$ odebrat 4 kameny
$8 \oplus 4 = 12 > 8$
$9 \oplus 4 > 9$.
Odebereme-li 4 kameny z druhé hromádky, získáme $3 \oplus 2 \oplus 8 \oplus 9 = 1 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 = 0$.

Úloha 1.15. Uvažujme pozici ve hře NIM$[22, 19, 14, 11]$. Je tato pozice vyrovnaná (tj. má nim součet 0)? Předpokládejme, že třeba první hráč odebral 6 kamenů z druhé hromádky. Jak odpoví druhý hráč?

Řešení:

```
        22=16+4+2=  10110
        19=16+2+1=  10011
        14=8+4+2 =  01110
\oplus  11=8+2+1 =  01011
                   (00000)_2 \ldots nulová pozice (vyrovnaná, bezpečná, s
```

Po odebrání 6 kamenů zůstane

```
        22         = 10110
        13=8+4+1   = 01101
        14         = 01110
\oplus  11         = 01011
                   (11110)_2
```

```
        22         = 10110
 \oplus              11110
                   (01000)_2 = 8
```

Druhý hráč odebere z první hromádky $22 - 8$ kamenů.

Úloha 1.16. Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice ve hře s odčítáním, kde $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj odhad dokažte!

Řešení: $n \equiv 0, 2 \pmod 9$.

Úloha 1.17. (Betlová hra Odeber a Rozděl) Na stole leží dvě hromádky kamenů. Na počátku první obsahuje m kamenů a druhá n kamenů. Pozici označíme $\mathrm{ED}[m, n]$, kde $m, n > 0$. Dva hráči se střídají v tazích. Tahem je odebrání jedné hromádky a druhou rozdělit na dvě neprázdné hromádky. Koncová pozice je $\mathrm{ED}[1, 1]$. Poslední hráč, který zahrál, prohrál (betlová varianta). Dokažte, že právě pozice tvaru $\mathrm{ED}[3k - 1, 1]$, $\mathrm{ED}[1, 3k - 1]$ nebo $\mathrm{ED}[3k - 1, 3l - 1]$, kde $k, l > 0$ jsou libovolná čísla, jsou nulové pozice. Úlohu řešte také pro pozici $\mathrm{ED}[20, 21]$.

Úloha 1.18. (Hra s odčítáním) Hra s odčítáním bude mít tato pravidla: Je-li na hromádce sudý počet kamenů, může se odebrat $1, 2, 68, 237$ nebo 250 kamenů. Je-li počet lichý, lze odebrat $1, 5, 7, 236$ nebo 249 kamenů z hromádky. Ukažte, že je-li na počáteční hromádce sudý počet kamenů, potom se jedná o $\mathcal{N}$ pozici. (Použijte vhodné párování.)

Úloha 1.19. Nalezněte nim součet všech čísel od 1 do $2^n - 1$, kde $n \in \mathbb{N}$. (Použijte dvojkovou soustavu.)

Úloha 1.20. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost s odčítáním, kde $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj závěr dokažte!

Úloha 1.21. Hra má tato pravidla: Na stole leží 4 hromádky kamenů. Hráč na tahu může odebrat libovolný počet z prvních dvou hromádek nebo libovolný počet dělitelný třemi ze třetí a čtvrté hromádky. Hráči se v tazích střídají. Poslední hráč vyhrál. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost pozice TW$[51, 27, 17, 19]$ a svůj závěr zdůvodněte!

Úloha 1.22. (Partyzánská varianta hry s odčítáním) Uvažujme hru s odečítáním, první hráč může odebírat $1, 3$ nebo 4 kameny, druhý hráč může odebírat $1, 2$ kameny. Nalezněte všechny vyhrávající pozice pro prvního hráče. Svůj závěr dokažte!

---

[2] TODO: K!, + Wolfe K!

Úloha 1.23. Nalezněte $\mathcal{P}$ pozice ve hře s odebíráním, je-li $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj závěr zdůvodněte!

Úloha 1.24. Nalezněte Sprague–Grundyovy hodnoty ve hře s odebíráním, je-li $S = \{1, 3, 4, 7\}$. Svůj závěr dokažte!

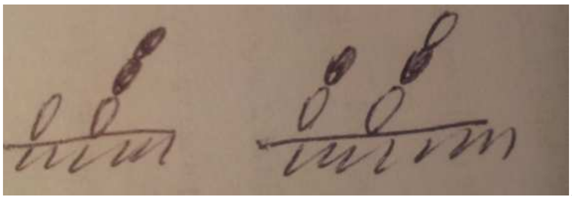
Úloha 1.25. Uvažujme hru s odebíráním předmětů, kde pravidla hry umožňují odebírat počet kamenů dělitelný třemi. Koncové pozice jsou $0, 1, 2$. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost.

Úloha 1.26. Hraje se hra s následujícími pravidly. Na stole leží 4 hromádky kamenů. Hráč na tahu může odebrat libovolný nenulový počet z prvních dvou hromádek a libovolný počet kamenů dělitelných třemi z posledních dvou hromádek. Nalezněte Sprague–Grundyovu funkci počáteční pozice $[61, 27, 17, 49]$. Svůj závěr zdůvodněte. Pozn. Hráč odebírá vždy pouze z jedné hromádky.

Úloha 1.27. Uvažujme partyzánskou variantu hry NIM. První hráč odebírá $s_1 \in S_1 = \{1, 3, 4\}$ kamenů, druhý $s_2 \in S_2 = \{1, 2\}$. Nalezněte všechny vyhrávající pozice pro prvního hráče a svůj závěr zdůvodněte. Uvažujte obě možnosti, tj. začíná levý nebo pravý hráč.

Úloha 1.28. Nalezněte dvě pozice hry HACKENBUSH s hodnotou $1\frac{1}{4}$.

Řešení:

.

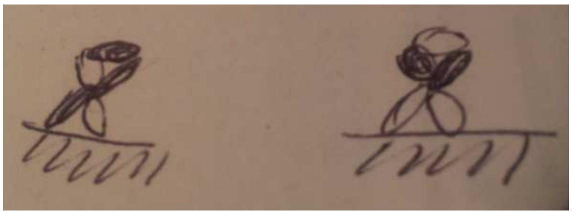
Protože na první obrázku je $1 + \frac{1}{4}$ a na druhém $\frac{1}{2} + (0,11)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Úloha 1.29. Použitím věty o nejstarším prvku nalezněte hodnoty následujících her:

(1) $\{\frac{1}{2} \mid 3\frac{1}{2}\}$ (2) $\{-2, -1 \mid -\frac{1}{4}\}$ (3) $\{0 \mid \frac{3}{4}, 3\}$ (4) $\{-1, 0, 1 \mid 2, 2\frac{1}{2}\}$

Úloha 1.30. Nalezněte hodnoty hry HACKENBUSH na následujícím grafu:

Řešení:

.

Na levém obrázku červené i modré větvičky jsou spojeny se základnou, proto hodnota je $2 - 3 = -1$. Na obrázku vpravo se postupuje podle definice, naleznou se hodnoty podgrafů a získáme $\{\frac{1}{2} \mid 1\frac{1}{2}\} = 1$.

Úloha 1.31. Najděte hodnotu hry LYŽAŘI:

L				
		R		
			L	

Řešení:

L				
		R		

$+$

			L	

$= 2 + 2 = 4$

Úloha 1.32. Zjednodušte následující pozice a určete jejich hodnotu!

1. $\{0, *, \bullet 2, \bullet 4, \bullet 6 \mid 0, *, \bullet 2, \bullet 4, \bullet 6\}$
2. $\{0 \mid 0, *, \uparrow\}$
3. $\{* \mid 0, *\}$

4. $\{\downarrow, 0 \mid \uparrow *\}$
5. $\{*, \downarrow, 0 \mid 0, *, \uparrow\}$.

Řešení:

1. Podle pravidla mex je hodnota $\bullet 1$.
2. Odstraněním dominujících prvků dostaneme $\{0 \mid 0, *\} = \downarrow *$.
3. Použitím bypassu je $\{* \mid 0\} = \downarrow$.
4. Odstraněním dominujících prvků je $\{0 \mid \uparrow *\} = \Uparrow$.
5. Odstraněním dominujících prvků a pravidla mex je $\{0, * \mid 0, *\} = \bullet 2$.

Úloha 1.33. Dva hráči hrají NIM. Uvažujme pozici NIM$[3, 7, 10, 11]$.

1. Jaká je hodnota této pozice?
2. Jaký je první vyhrávající tah?

Řešení: Nim součet je: $2 + 1 + 4 + 2 + 1 + 8 + 2 + 8 + 2 + 1 = 5$, hodnota je tedy $\bullet 5$. Vyhrávající tah je odebrání pěti kamenů z druhé hromádky.

$= \{0, *, *3 \mid \ldots\} = *2$

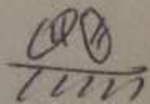
$= \{0, *2 / \ldots\} = \underline{\underline{*1}}$

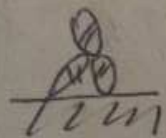
oelutto ne grafu je *

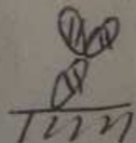
(a) 

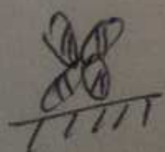
(b) 

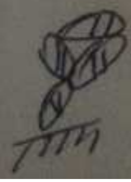
(a)

 $= * + * = 0$

 $= \{*2, *0 \mid \ldots\} = *1$

 $= \{*2, *0 \mid \ldots\} = *$

 $= \{*, * \mid \ldots\} = 0$

 $= \{*, *3, *0 \mid \ldots\} = *2$

Úloha 1.34. Nalezněte hodnotu následující pozice hry Ropuchy a Skokani. (Levý hráč hraje vpravo s T, pravý hráč hraje doleva s F.)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ \hline\end{array}.$$

Řešení: $\left\{0 \mid -\frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}$

Úloha 1.35. Kdo vyhraje v následujících hrách?

1. $\{1 \mid -2\} + \{2 \mid 0\} + \{-1 \mid -2\} + *$
2. $\{* \mid -2\} + \{2 \mid \downarrow\} + *$
3. $\pm 1 + \boldsymbol{+}_2 + \downarrow$
4. $\boldsymbol{-}_1 + \boldsymbol{+}_2 + *$.

Řešení:

1. Teploty her jsou po řadě $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}$ a 0. Pokud začíná levý hráč, hra dopadne $1 + 0 - 1 + 0 = 0$ a vyhraje pravý. Pokud začíná pravý, hra dopadne $-2 + 2 - 2 + 0 = -2 < 0$. A i v tomto případě vyhraje pravý. Hra je záporná.
2. Zbylé tři hry jsou fazy s nulou.

Úloha 1.36. Nalezněte hodnotu hry Ropuchy a Skokani v následujících konfiguracích. (Levý hráč hraje vpravo s T, pravý hráč hraje doleva s F.)

1. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ \hline\end{array}$
2. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ \hline\end{array}$.

Řešení: Add (1) 2, add (2) $\{1 \mid \{0 \mid \Downarrow *\}\}$.

Úloha 1.37. Hra začíná se 4 hromádkami, obsahující $3, 4, 5$ a 6 kamenů. Dva hráči se střídají v tazích. Hráč na tahu buď

1. odebere 1 kámen z jedné hromádky a po jeho tahu zbydou alespoň 2 kameny na hromádce, nebo
2. odebere celou hromádku se dvěma nebo třemi kameny.

Hráč, který odebere poslední hromádku, vyhrál. Kdo vyhraje? První nebo druhý hráč? Nalezněte vyhrávající strategii.

Řešení: Nim hodnoty na jednotlivých hromádkách jsou $\bullet 2$, $\bullet 0$, $\bullet 1$ a $\bullet 0$. Nim součet je $\bullet 3$, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Odebere-li hráč z první hromádky 2 kameny, dostane se do postavení s nulovým nim součtem.

Úloha 1.38. (Bachetova hra) Na stole leží n kamenů. Dva hráči se střídají v tazích, v každém tahu odeberou $1, 2, \ldots, k$ kamenů. Vítězem je hráč, který odebral poslední kámen. Pro které hodnoty k, n má vyhrávající strategii první hráč?

Úloha 1.39. Hraje se hra Nim (v normální variantě) v počáteční pozici Nim$[26, 19, 10, 9, 7]$. Existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče? Kolik nejvíce kamenů lze odebrat?

Úloha 1.40. Nechť $\{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ je nestranná hra.

1. Kolik má hra pozic?
2. Vypočítejte Grundyovu hodnotu této hry.
3. Kdo ve hře vyhraje?

Úloha 1.41. Dokažte, že hra $\{0 \mid *\}$ je kladná a menší než libovolné kladné číslo.

Úloha 1.42. Nalezněte hodnotu hry $\left\{\frac{1}{8} \mid \frac{5}{8}\right\} - \left\{-\frac{91}{64} \mid -\frac{41}{32}\right\}$.

Úloha 1.43. Připomeňme, že v substrakční hře je dána hromádka n kamenů. Hráči se střídají v odebírání kamenů z hromádky. Kolik je možné odebrat kamenů v jednom tahu, určuje množina S. Poslední hráč vyhrál.

V každé z následující hře s odebíráním nalezněte, který hráč (první nebo druhý) má vyhrávající strategii. Pokud je to první hráč, nalezněte vyhrávající tah. Je-li to druhý hráč, určete všechny vyhrávající odpovědi na všechny možné první tahy, je-li:

1. $S_1 = \{1, 3, 6\}, n = 30.$
2. $S_2 = \{2, 3\}, n = 107.$
3. $S_3 = \{1, 4, 5\}, n = 806.$

Úloha 1.44. Předpokládejte, že se hraje součtová hra všech tří her z předcházející úlohy. Nalezněte všechny vyhrávající tahy prvního hráče!

Úloha 1.45. Uvažujme substrakční hru $S = \{1, a\}$, pro sudé $a > 1$.

1. Nalezněte invarianty popisující $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ pozice v této hře.
2. Nalezněte vyhrávající tah pro prvního hráče ve hře $S = \{1, 304\}$, pro $n = 2133$.

Úloha 1.46. Nalezněte vyhrávající tah v následujících Nim hrách, nebo ukažte, že druhý hráč má vyhrávající strategii, je-li:

1. Nim$[10, 10]$
2. Nim$[8, 9, 10]$
3. Nim$[16, 23, 1, 1, 5]$
4. Nim$[4, 6, 2, 2, 5]$.

Úloha 1.47. Uvažujme hru Kayles. Pro každou hru vypočtěte Grundyovu hodnotu a nalezněte vyhrávající tah pro prvního hráče, je-li tato hodnota nenulová a je-li dáno:

1. 7 kuželek
2. 17 kuželek
3. 23 kuželek.

Úloha 1.48. Pro každou z následujících her nalezněte fazy interval.

(a) $\{0 \mid 0\}$ (b) $\{5 \mid 2\}$ (c) $\{0 \mid *\}$ (d) $\{\{3 \mid 4\} \mid \{1 \mid 0\}\}$.

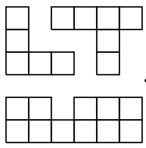
Úloha 1.49. Nalezněte kanonické tvary her:

(a) $\{* \mid -1, -2\}$ (b) $\{\{1 \mid -1\}, *, 0 \mid \uparrow\}$ (c) $\{\uparrow \mid \uparrow\}$.

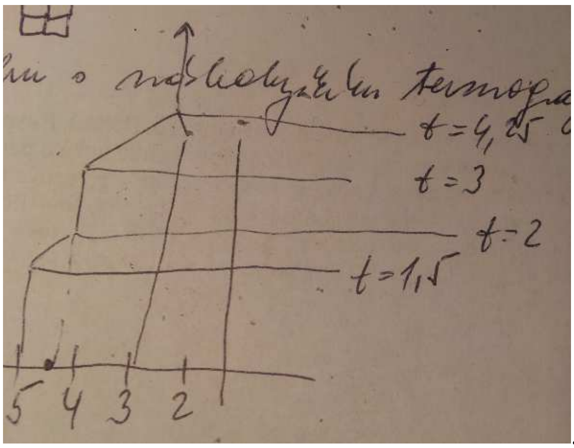
Úloha 1.50. Nakreslete termograf pro každou z následujících her. Nalezněte průměr a teplotu her.

(a) $\{4 \mid 1\}$ (b) $\{\{5 \mid 3\} \mid \{1 \mid 0\}\}$ (c) $\{1, \{3 \mid 0\} \mid \{-1 \mid -3\}\}$.

Úloha 1.51. Nalezněte průměr (mean) a teplotu každé z komponent následující hry DOMINOVÉ DLÁŽDĚNÍ. Naleznete nejsilnější tah levého hráče?

.

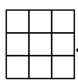
Úloha 1.52. Nalezněte hru s následujícím termografem.



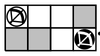
.

Úloha 1.53. Nechť G_1, G_2 a G_3 jsou substrakční hry s množinami $S_1 = \{1, 3, 4\}$, $S_2 = \{2, 4, 6\}$ a $S_3 = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Kdo má vyhrávající strategii ve hře $G_1+G_2+G_3$ z počáteční pozice $[100, 100, 100]$?

Úloha 1.54. Nalezněte den narození hry (výšku stromu) DOMINOVÁNÍ v pozici:

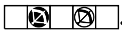
.

Úloha 1.55. Nalezněte hodnotu hry AMAZONKY

.

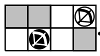
Řešení: ± 2

Úloha 1.56. Nalezněte hodnotu hry AMAZONKY

.

Řešení: $*$

Úloha 1.57. Nalezněte hodnotu hry AMAZONKY

.

Řešení: 1 ± 1

Úloha 1.58. Ve hře PADAJÍCÍ DOMINO určete hodnotu pozice, je-li:

Řešení: $\bullet 2$, $+_1$

Úloha 1.59. Nalezněte levý (a pravý) stop pozice

$$\{0, \{2 \mid 1\}, \{\{1 \mid -1\} \mid \{0 \mid -1\}\} \mid \{1 \mid -3\}, \{\{2 \mid -1\} \mid \{2 \mid 2\}\}\}.$$

Řešení: $1, -1$

Úloha 1.60. Nalezněte den narození hry $\frac{15}{16}$

Řešení: 5

Úloha 1.61. Nalezněte hodnotu hry $\left\{-\frac{15}{16} \;\middle|\; -\frac{5}{8}\right\}$

Řešení: $-\frac{3}{4}$

Úloha 1.62. Která z následujících her G splňuje $G < \uparrow *$?

(a) $\frac{1}{2}$ (b)± 1 (c) $\bullet 2$.

Řešení: (c).

Úloha 1.63. Dva hráči hrají hru KAYLES. Před hráči stojí vedle sebe tři spojité bloky $8, 9$ a 10 kuželek. Nalezněte hodnotu hry. Jaký je první optimální tah prvního hráče?

Řešení: Hodnota hry je $*+\bullet 4+\bullet 2 = \bullet 7$. První hráč může shodit druhou kuželku v bloku 9 kuželek (rozloží tento blok na souvislé řady 1 a 7 kuželek). Nyní hodnota hry bude $* + (* + \bullet 2) + \bullet 2 = \bullet 0$ a první hráč vyhraje.

Úloha 1.64. Dva hráči hrají hru s odčítáním s množinou $S = \{2, 5, 6\}$ na třech hromádkách s $7, 8$ a 9 kamenů. Kdo hru vyhraje? Jaký je nejlepší tah prvního hráče?

Odpověď: První hráč odebere 2 kameny z hromádky o 7 kamenech.

Úloha 1.65. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 3, 6, 8\}$. Jaká je perioda této posloupnosti?

Odpověď: 14

Úloha 1.66. Hraje se hra podobná hře NIM. Dovolenými tahy jsou:

1. Hráč může odebrat celou hromádku, která má pouze jeden kámen.
2. Hráč může odebrat z větší hromádky (mající alespoň jeden kámen) jeden kámen.
3. Hráč může odebrat dva kameny z libovolné hromádky mající více jak 4 kameny a rozdělit zbývající hromádky na dvě neprázdné hromádky.

Úloha 1.67. Hraje se hra podobná hře NIM na jedné hromádce. Dovoleným tahem je odebrat nejvíce polovinu kamenů z hromádky. Objevte zákonitost nim posloupnosti!

Řešení: : Nejdříve spočteme $\mathcal{G}(0) = 0, \mathcal{G}(1) = 1$ a $\mathcal{G}(2) = 2$. Pro $n \geq 3$ pomocí indukce dostaneme

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(a); a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}.$$

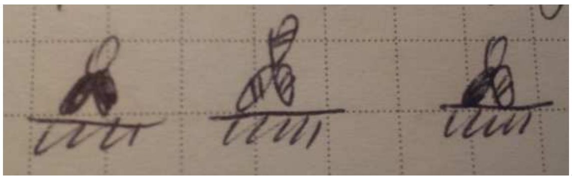
$$0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

ekvivalentně

$$\mathcal{G}(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Tento závěr může být dokázán indukcí: Tvrzení platí pro $n = 0, 1, 2.$ Předpokládejme, že tvrzení platí pro (malé) hodnoty až do $n-1$ včetně. Dokážeme, že tvrzení platí i pro n. Nechť $\lceil \log_2(n+1) \rceil$, potom $n+1 \leq 2^k$. To znamená $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq 2^{k-1}$. Tedy $\mathcal{G}(a)$ obsahuje $0, 1, 2, \ldots, k-1$ mimo k. Pomocí pravidla mex platí $\mathcal{G}(n) = k$. Q.E.D.

Úloha 1.68. Nalezněte hodnoty hry (červenomodrý a zelený HACKENBUSH.)

.

Úloha 1.69. Najděte hodnotu hry LYŽAŘI v pozici:

L			
		R	

.

Úloha 1.70. Hra ROPUCHY A SKOKANI v pozici jako na obrázku

T		F		F	F	T	T	T

. Jaká je hodnota této hry?

Úloha 1.71. Nechť $G = \{0, * \mid \uparrow\}$. Ukažte:

1. $G > 0$,
2. $*$ je reverzibilní,
3. $G = \Uparrow *$.

Úloha 1.72. Ukažte, že ve hře NIM z libovolné $\mathcal{N}$ pozice je lichý počet vyhrávajících tahů (do $\mathcal{P}$ pozice).

Úloha 1.73. Nechť a, b jsou celá kladná čísla. Uvažujme substrakční hru, ve které je jedna hromádka n kamenů a hráči mohou odebírat buď a nebo b kamenů z hromádky. Nalezněte Grundyovu posloupnost (nim posloupnost). Je tato posloupnost periodická? Nalezněte její periodu, v případě, že odpovíte ano.

Odpověď: $a + b$

Úloha 1.74. Ukažte, že ve hře CHOMP odebrání horního pravého čtverečku 1×1 nemusí být dobrý první tah.

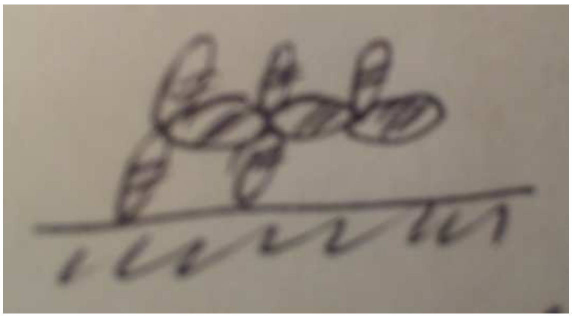
---

[3]TODO: K! Starategy stealinf walla

Úloha 1.75. Nalezněte Sprague–Grundyovu posloupnost hry, která se hraje na jedné hromádce, kde hráči mohou odebrat, jsou-li na tahu, nejméně jeden a nejvíce polovinu kamenů z hromádky.

Úloha 1.76. Hraje se hra s odebíráním kamenů. Na stole na počátku hry leží 32 kamenů. Hráč na tahu může odebrat $1, 2, 3$ nebo 4 kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Naleznete vyhrávající strategii pro tuto hru? Je lepší v této hře začínat?

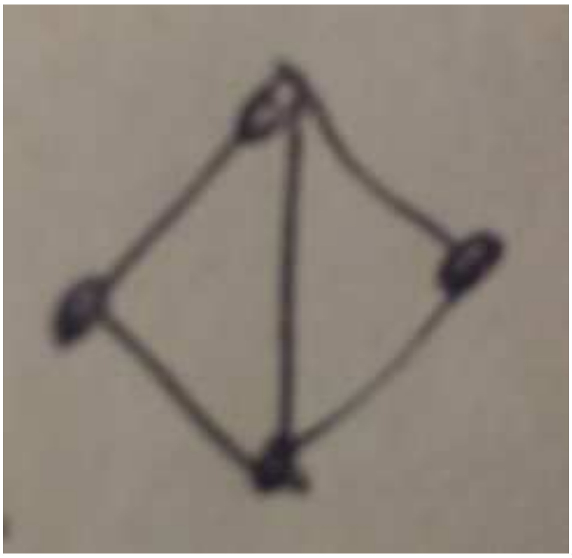
Úloha 1.77. Ve hře ZELENÝ HACKENBUSH nalezněte hodnotu hry v pozici:


.

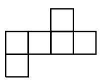
Úloha 1.78. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 7, 8\}$. Jaká je perioda této posloupnosti?

Úloha 1.79. Dva hráči hrají substrakční hru $S = \{2, 7, 8\}$ na dvou hromádkách s 11 a 13 kameny. Jaký je vyhrávající tah prvního hráče?

Úloha 1.80. Nalezněte hodnotu hry SNORT v pozici:


.

Úloha 1.81. Nalezněte hodnotu hry DOMINOVÁNÍ v pozici


.

Úloha 1.82. Kdo vyhraje hru ROPUCHY A SKOKANI? jaký je nejlepší tah?

1.

T		F		F	F	T	T	T

$(= -2*)$.

2.

T		T	T		F	T	T	T

$(= \{2* \mid 1\})$.

3.

T	T	T	T			F	F	F

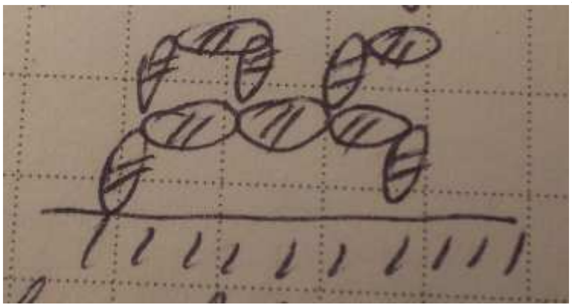
$(= \{1* \mid \downarrow\})$.

Úloha 1.83. Nakreslete termograf hry $\{\{4 \mid 3\} \mid \{1 \mid -1\}\}$, nalezněte fazy interval, průměr a teplotu hry. Stejnou úlohu řešte i pro hru $\{\{4 \mid 1\} \mid \{0 \mid -1\}\}$.

Úloha 1.84. Nalezněte hodnoty následujících her:

1. $\left\{-2, -1 \mid \frac{1}{2}, 1\right\}$
2. $\left\{\frac{1}{4} \mid \frac{5}{8}\right\}$
3. $\bullet 5 + \bullet 6 + \bullet 7$
4. $\{\bullet 0, \bullet 3, \bullet 5 \mid \bullet 0, \bullet 3, \bullet 5\}$.

Úloha 1.85. Jaký je nejlepší tah ve hře ZELENÝ HACKENBUSH v pozici:


.

Úloha 1.86. Dva hráči hrají substrakční hru $S = \{2, 5, 6\}$ se třemi hromádkami $7, 8$ a 9 kamenů. Kdo ve hře vyhraje? A proč?

Úloha 1.87. Nalezněte nim posloupnost substrakční hry $S = \{2, 4, 7, 8\}$. Jaká je perioda této posloupnosti?

Úloha 1.88. Využijte spočtené hodnoty ve hře ROPUCHY A SKOKANI (viz [ANW, LIP], str. 134–139). Kdo vyhraje následující hru? Jaký je nejlepší tah v pozici

T	T		F	T	F
	T	T		F	F
T	T	F		F	T

?

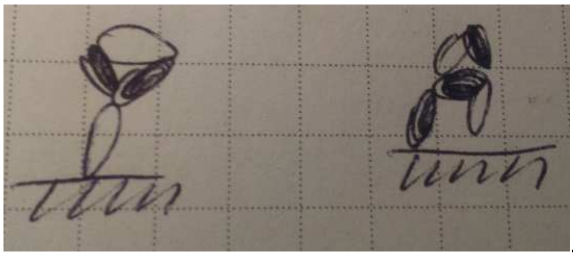
Úloha 1.89. Určete hodnoty:

1. $\bullet 1 + \bullet 3 + \bullet 5 = ?$
2. $\bullet 2 + \bullet 5 + \bullet 7 = ?$
3. $\bullet 1 + \bullet 2 + \bullet 4 = ?$
4. $\bullet 1 + \bullet 3 + \bullet 9 + \bullet 27 = ?$

Úloha 1.90. Nakreslete graf hry HACKENBUSH s hodnotou $1\frac{3}{4}$.

Úloha 1.91. Zjednodušte: $\{1 \mid 3\frac{1}{2}\}$; $\{-2,-1 \mid -\frac{1}{4}\}$; $\{0 \mid \frac{3}{4}, 2\}$; $\{-1,0,1 \mid 3\frac{1}{2}, 4\}$. Nalezněte také součet těchto her.

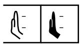
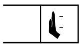
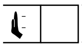
Úloha 1.92. Nalezněte hodnoty hry HACKENBUSH v pozicích

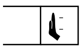
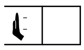
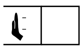
.

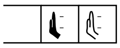
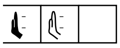
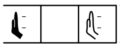
Úloha 1.93. Nalezněte hodnoty následující hry ROPUCHY A SKOKANI. Levý začíná. Jaký bude jeho první tah?

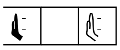
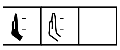
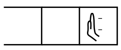
T		F	
	T	F	
	F	T	

Úloha 1.94. Hra PUSH se hraje se žetony na šachovnici. Hráč, je-li na tahu, vybere svůj kámen a posune ho doleva a s ním se posunou i další kameny, které stojí takovému posunutí v cestě. Pokud se kámen dostane mimo políčka, kámen „spadne“ a již se s ním nehraje.

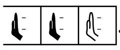
 $= \{$  $\mid$  $\} = \{-2 \mid -1\} = -1\frac{1}{2}$,

protože  $= \{\mid$  $\} = -2$,  $= \{\mid 0\} = -1$. Výsledek můžeme použít při určení hodnoty hry

 $= \{$  $\mid$  $\} = \left\{1\frac{1}{2} \,\middle|\, 2\right\} = 1\frac{3}{4}$,

protože  $= \{$  $\mid$  $\} = \{1\frac{1}{2} \mid 3\} = 2$.

Spočítejte hodnotu hry

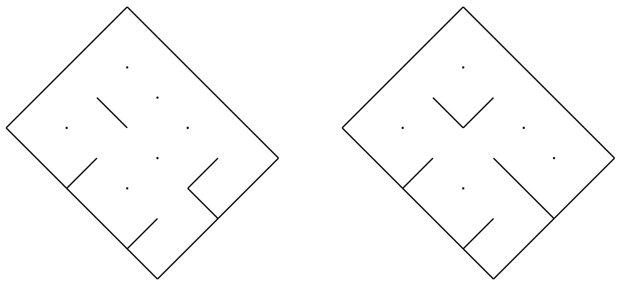
.

Úloha 1.95. Uvažujme hru CRAM A DOMINOVÉ DLÁŽDĚNÍ pro tabulku velikosti $n \times m$.

1. Jak hra dopadne, když jsou n i m sudá?
2. Jak hra dopadne, když je právě jedno z čísel n a m liché?

Úloha 1.96. Je dána čokoláda velikosti $n \times m$. Hráči se střídají v rozlamování kousků ležících na stole (na počátku tedy jeden) a výsledné dva položí zpět na stůl. Kdo nemá tah, prohrál. Pro jaké hodnoty n a m vyhraje první hráč a pro jaké druhý hráč?

Úloha 1.97. Pravidla hry MAIZE jsou následující. Dva hráči se střídají v posouvání kulatého žetonu v bludišti. Levý posouvá žeton o jednu pozici šikmo doleva dolů, pravý hráč posouvá žeton o jednu pozici šikmo doprava dolů. Skrz vnitřní či obvodovou zeď není možné táhnout. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Hra MAZE je stejná s tím rozdílem, že hráč si v tahu může vybrat, kolik ve svém směru udělá kroků (samozřejmě pokud je v jeho směru volno). Uvažujme následující hrací plány:



Určete výsledek her MAIZE i MAZE na obou hracích plánech, a to pro každé z možných počátečních políček žetonu (neboli určete, do jaké výsledkové třídy patří).

Úloha 1.98. Na stole leží hromádka n kamenů. Hru hrají dva hráči, v tazích se střídají. V každém tahu buď

1. pokud počet kamenů k na hromádce není mocnina 2, lze odstranit nejvyšší mocninu 2 menší jak k, nebo
2. pokud je počet kamenů k sudý, lze odstranit polovinu kamenů.

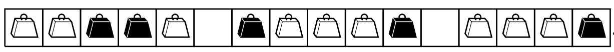
Kdy vyhraje první (druhý) hráč? Uvažujte normální (nebo betlovou) variantu hry.

Úloha 1.99. Dokažte:

1. $\downarrow < 0 < \uparrow$
2. $\uparrow \parallel *, \quad \downarrow \parallel *$
3. $\Downarrow < * < \Uparrow$.

Úloha 1.100. Nalezněte kanonický tvar her $\uparrow *, \downarrow *, \Uparrow, \Uparrow *, \Downarrow, \Downarrow *$. Připomeňme, že $\uparrow * = \uparrow + *, \Uparrow = \uparrow + \uparrow$.

Úloha 1.101. Analyzujte pozici ve hře CLOBBER a nalezněte její kanonický tvar.

.

Úloha 1.102. NIM je hra, ve které máme k hromádek kamenů, na $i$té hromádce leží n_i kamenů. Ve svém tahu hráč vybere jednu hromádku a z ní odebere nějaký nenulový počet kamenů (klidně všechny). HLADOVÝ NIM je podobná hra, ve které je povoleno odebírat pouze z hromádky s nejvyšším počtem kamenů (pokud je více takových, tak z libovolné z nich). Analyzujte tuto hru.

Úloha 1.103. Zahrajte si tuto variantu hry NIM. Hru hrají dva hráči a na začátku není na stole žádný kámen. Hráči střídavě pokládají $1, 2$ nebo 3 kameny na jednu hromádku. Vítězem je hráč, který jako první dosáhne počtu 16.

1. Vytvořte orientovaný graf, který bude modelovat tuto hru.
2. Nalezněte vyhrávající strategii pro druhého hráče.

Úloha 1.104. Dokažte, že každé kladné celé číslo má pouze jediný binární rozklad.

Nápověda: Existenci dokažte matematickou indukcí a jednoznačnost sporem, tj. předpokládejte, že existují takové rozklady dva různé a dostanete spor s formulí $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$. Inspirujte se u Euklidova algoritmu částečného dělení.

Úloha 1.105. Platí $2 \oplus 8 \oplus 14 = 5$?

Řešení: Neplatí. Platí $2 \oplus 8 \oplus 14 = 2 \oplus 8 \oplus (2 + 4 + 8) = 4$

Úloha 1.106. Nalezněte hodnotu ČBNIMu þ●●○. Nalezněte pozici ČBNIMu s hodnotou $7/8$

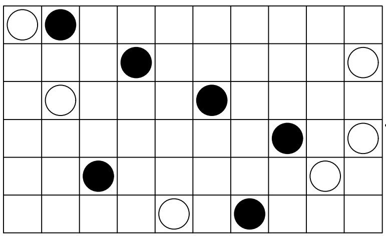
Řešení:

1. Hodnota je $1 - 1/2 - 1/4 + 1/8 = (8 - 4 - 2 + 1)/8 = 3/8$.
2. Hodnota je $(0,011)_2 = 1/4 + 1/8 = 3/8$. (Berlekampovo pravidlo)
3. Hodnota je $\{$þ●●$, 0 \mid$ þ●, þ$\} = \{1/4 \mid 1/2\} = 3/8$.

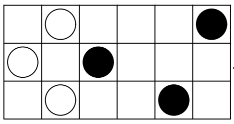
Protože $7/8 = 1 - 1/8$, je þ●○○○. $7/8$ je také $7 \cdot 1/8$. Jednořádková verze je

1. $7/8 = 1 - 1/2 + 1/4 + 1/8 =$ þ●○○
2. $7/8 = (0,111)_2 =$ þ●○○ (Berlekampovo pravidlo)
3. $7/8 = \{3/4 \mid 1\} = \{$þ●○ $\mid$ þ$\} =$ þ●○○.

Úloha 1.107. Zahrajte si NORTHCOTTOVU hru v této pozici:

$G =$  .

Úloha 1.108. Zahrajte si NORTHCOTTOVU hru v této pozici:

$G =$  .

Úloha 1.109. Hra Dr. Nim. Máme 15 kamenů. Hráč na tahu odebere $1, 2$ nebo 3 kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhraje. V prohrávající pozici hráč na tahu prohraje, pokud soupeř hraje správně. Zvýrazněte všechny prohrávající pozice. Úlohu řešte také pro 21 kamenů.

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21$$

Úloha 1.110. (hra Nim) Nalezněte, který z hráčů má vyhrávající strategii v následujících hrách. Následující, či předcházející hráč?

1. Nim$[0]$ (bez hromádky a bez kamenů).
2. Nim$[1]$, Nim$[2]$,…, Nim$[n]$ ($n \in \mathbb{N}$).
3. Nim$[1]$+Nim$[1]$=Nim$[1, 1]$ (dvě hromádky po jednom kamenu), Nim$[n, n]$ (dvě hromádky se stejným počtem kamenů) ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
4. Nim$[3, 5]$ (dvě hromádky se třemi a pěti kameny), Nim$[m, n]$ (dvě nestejné hromádky $m \neq n$).
5. Jaký můžete udělat závěr pozorování pro vyhrávající strategie hry Nim s nejvíce dvěma hromádkami?
6. Nim$[3, 5, 8]$ (tři hromádky se 3, 5 a 8 kameny).

Úloha 1.111. (prvočíslený Nim) Uvažujme hru Nim s dodatečnou podmínkou, že se může odebrat jeden kámen, nebo prvočíselný počet kamenů.

1. Nalezněte Grundyovy hodnoty pro hromádku Nim$[n]$ s n kameny, $0 \leq n \leq 10$.
2. Vyslovte hypotézu pro hodnoty $\mathcal{G}(n)$ pro libovolné n.
3. Dokažte vaši hypotézu.
4. Nalezněte vyhrávající tah z pozice Nim$[73, 121, 33]$