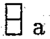
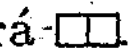
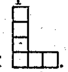
# Hry a strategie

RNDr. VÁCLAV VOPRAVIL, PaedDr. JOSEF PORKERT, PedF Ústí nad Labem

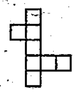
V tomto článku se seznámíme s jistou podstrukturou teorie her a čísel. Zavedeme několik konkrétních her a naučíme se používat strategické důkazy.

Dohodněme se, že při našem vyšetřování budeme uvažovat jen takové hry dvou hráčů ($L$ — levého, $P$ — pravého), ve kterých se hráči pravidelně střídají v tazích a pomocí tahů dovolených pravidly se hráči dostávají do dalších jednodušších postavení. Hra končí, když některý z hráčů již nemá tah.

Na úvod si zkusme zahrát hru DOMINO: DOMINO se hraje na čtvercové síti, na které je vymezen základní obrazec tak, že $L$-hráč odebírá ze základního obrazce segmenty tvaru  a $P$-hráč odebírá . Hra končí, když některý z hráčů nemá tah, v tomto případě tento hráč prohrává.

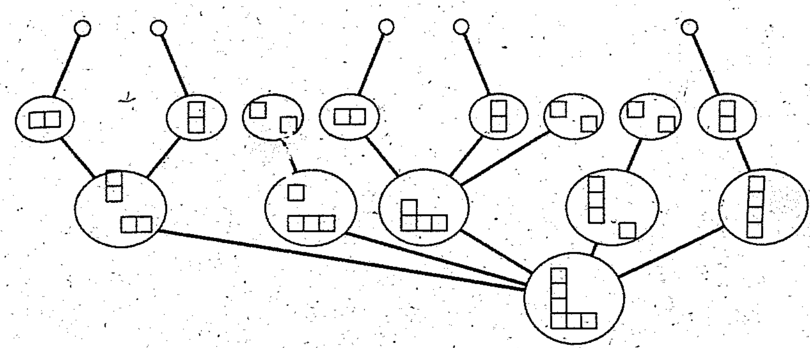
Zvolme si například základní obrazec takto: . Příkladem „partiáře" naší hry může být obr. 1, kde tahy $L$-hráče znázorňujeme nahoru doleva, tahy $P$-hráče nahoru doprava. Celou situaci jistě můžeme rázem zjednodušit, když budeme zakreslovat pouze logický strom možností, takže pro naši hru dostaneme obr. 2.

Zahrajete-li si nyní hru na stromečku ($L$-hráč doleva, $P$-hráč doprava), zjistíte, že v této hře existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče, to znamená, že v této hře ať začíná kdokoliv, může $L$-hráč svým tahem zahrát tak, aby v této hře měl vždy tah.

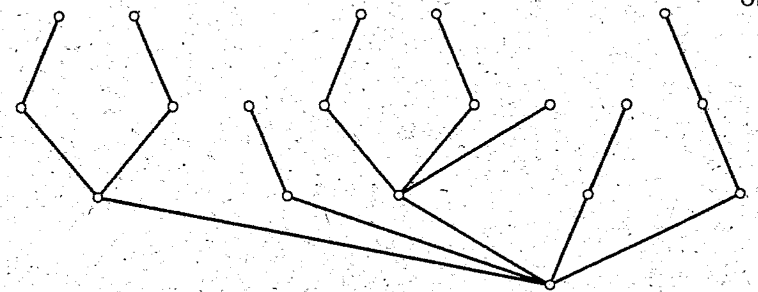
**Úloha:** Nakreslete si stromeček pro hru  a zjistěte, zda v této hře existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče.

Protože různé společenské hry mohou mít stejné stromečkové reprezentace, obrátíme nyní svou pozornost pouze na toto abstraktní jádro společenských her. Podívejme se nyní na některé nejjednodušší hry a jejich strategickou interpretaci.



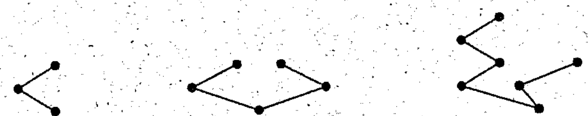


Obr. 1



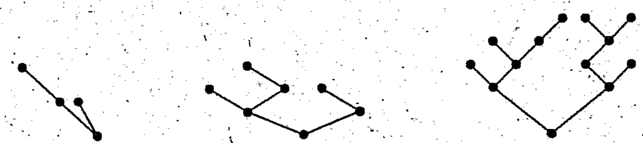
Obr. 2

Ve hře • existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče, první hráč totiž nemá žádný pravidly dovolený tah. Tuto strategickou úvahu budeme stručně označovat $\rightsquigarrow 2$ a takové hry budeme nazývat nulové. Další příklady jsou



Ve hře  existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče. Tuto strategickou úvahu budeme stručně označovat $\rightsquigarrow L$.

Příklady:

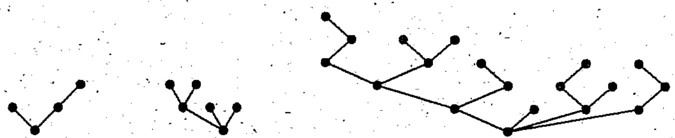


Ve hře  existuje vyhrávající strategie pro $P$-hráče, $\rightsquigarrow P$.

Dalšími příklady jsou:

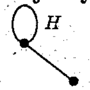
Ve hře  existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče. První hráč zahraje svůj tah a druhý již žádný pravidly dovolený tah nemá. Tuto strategickou úvahu budeme zapisovat $\rightsquigarrow 1$.

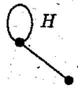
Příklady takových her jsou:

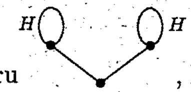


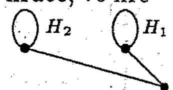
Rozvažte si například indukcí, že ať stromeček vypadá jakkoliv složitě, vždy tato hra z hlediska strategie má $\rightsquigarrow 1$, $\rightsquigarrow 2$, resp. $\rightsquigarrow L$, $\rightsquigarrow P$.

Náznak indukce: Představme si, že máme hru $H$, ve které např. existuje vyhrávající strategie pro $P$-hráče a uvažujme tuto složitější hru

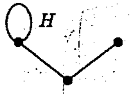



Začne-li v této hře $L$-hráč, zahraje svůj jediný tah do hry $H$, ve které (dokonce ať začíná kdokoliv) existuje vyhrávající strategie pro $P$-hráče. Naopak, začíná-li v předcházející hře $P$-hráč, nemá žádný tah a $L$-hráč vyhraje. Tedy ve hře  existuje vyhrávající strategie pro 2. hráče.

**Úloha:** Zjistěte, co platí pro hru  , když ve hře $H \rightsquigarrow 1$ ($\rightsquigarrow 2$).

Pochopitelně můžeme z hlediska strategie uvažovat i složitější hry; jestliže např. ve hře $H_1$ existuje vyhrávající strategie pro $P$-hráče, ve hře $H_2$ existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče, potom ve hře  existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče. Zahrajme si tuto hru. Začne-li $P$-hráč, potom nemá tah a $L$-hráč vyhrává. Naopak, začne-li $L$-hráč, může táhnout do hry $H_1$ (je to rozumné?) nebo do hry $H_2$, ve které (podle předpokladu) existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče. Tedy v této hře $\rightsquigarrow L$.

**Úloha:** Platí následující tvrzení? Nechť ve hře $H \rightsquigarrow P$. Potom ve hře




$\rightsquigarrow P$.

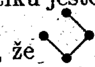
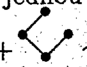


Ke každé hře $H$ můžeme sestrojit hru $-H$ (tzv. opačná hra ke hře $H$) tak, že vyměníme všechny tahy $L$-hráče za tahy $P$-hráče a naopak. Ve stromečkové reprezentaci pak sestrojení opačné hry ke hře $H$ znamená sestrojit zrcadlový obraz hry $H$.

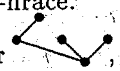
**Úloha:** Dokažte: $-(-H) = H$.

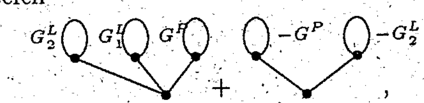
Jestliže jsme až dosud uvažovali hru jedinou, zkusme nyní hrát hry na dvou (a více) exemplářích, které nemusí být nutně různé. Takové hře říkáme součet her, její realizace je následující: Hráč, který je na tahu, může svůj tah zahrát v libovolném z nabídnutých stromečků.

**Příklad:** Dokažme, že $H + (-H)$ je nulová hra. Strategicky to znamená, že v této hře existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Totiž druhý hráč může uplatňovat tuto zásadu (kopírování tahů): zahrál-li svůj tah první hráč ve hře $H$, potom mu druhý hráč odpoví ve hře $-H$ a naopak. Ke každému tahu prvního hráče druhý hráč nalezne odpověď. Zkuste si celou problematiku ještě jednou na následující úloze:

**Úloha:** Ukažte, že  +  $\rightsquigarrow 2$

Pro zjednodušování a porovnávání her se nám bude hodit tato úmluva: hra $H$ je menší než hra $G$ (píšeme $H \lhd G$), právě když ve hře $G + (-H)$ existuje vyhrávající strategie pro $L$-hráče.

Podívejme se nyní na dvojici her , . U obou her existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče. Je to způsobeno tím, že z hlediska strategie je větev  v první hře naprosto zbytečná. Všimněme si nyní, že  $\lhd$  protože ve hře  +  $\rightsquigarrow L$. To nás vede k tomuto důležitému zobecnění: Mějme hru $G$ takovou, že ji lze schematicky nakreslit takto:  ; pak jestliže $G_1^L \lhd G_2^L$, můžeme celý fragment $G_1^L$ vynechat, aniž bychom změnili strategickou hodnotu hry. Pokusme se toto tvrzení dokázat. Naším úkolem je zřejmě dokázat, že hrajeme-li na dvou stromečcích




vyhrává druhý hráč, jedná se tedy o nulovou hru. Důkaz provedeme ve dvou krocích. Předpokládejme, že začíná $L$-hráč, pak svůj tah může provést buď do hry $G_2^L$ nebo $G_1^L$ nebo $-G^P$. Pokud by táhl do $-G^P$, pak $P$-hráč může táhnout do $G^P$ a pak pouze kopírovat tahy $L$-hráče, a tedy vyhrává. Podobně táhne-li $L$-hráč do $G_2^L$, $P$-hráč kopíruje jeho tahy v $-G_2^L$. Pokud $L$-hráč táhne do $G_1^L$, pak $P$-hráč odpoví tahem do

$-G_2^L$, takže i zde pro něj existuje vyhrávající strategie vzhledem k tomu, že předpokládáme $G_1^L \lhd G_2^L$, a tedy $G_1^L + (-G_2^L) \lhd 0$.

Začíná-li $P$-hráč, pak může táhnout buď do $G^P$ nebo do hry $-G_2^L$. Pro $L$-hráče pak jistě existuje vyhrávající strategie, stačí, aby kopíroval tahy $P$-hráče ve hrách $-G^P$ resp. $G_2^L$. Tím jsme dokázali, že v tomto součtu her existuje vyhrávající strategie pro 2. hráče, je to tedy nulová hra.

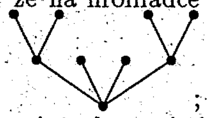
Smysl uvedeného tvrzení je pak zřejmý, uvědomíme-li si, že podobné tvrzení lze dokázat i „z druhé strany", že tedy lze zjednodušit hru i odebráním celých větví stromečku z pravé strany. Pak tedy umíme (vzhledem ke strategii) zjednodušit jakoukoliv hru, aniž bychom narušili její strategickou hodnotu.

Uvedený strategický důkaz je pro nás velice cenný, protože stejnou technikou lze dokázat celou řadu tvrzení v naší teorii. Snadno například ukážeme, že platí: *Je-li* $G \rhd H$, *potom* $G + K \rhd H + K$, *což jen potvrzuje naše intuitivní představy o součtu her.*

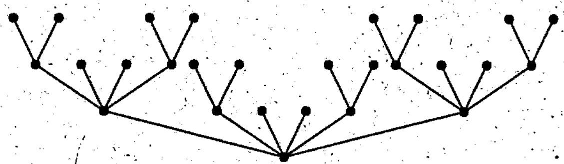
Bylo by jistě zajímavé vyslovovat a dokazovat další obecné věty o strategických hodnotách her, ale my se nyní zaměříme již jen na jistou speciální hru, která je obecně známa pod jménem NIM. Protože však je známo mnoho variant NIMu, vyslovme napřed pravidla námi použité verze:

Mějme dáno $n$ hromádek předmětů, v každé z nich je těchto předmětů libovolný počet. Úkolem hráčů je střídavě odebírat jednotlivé předměty z hromádek, vždy libovolný počet předmětů, ale vždy z právě jedné hromádky. Prohrává ten, kdo nemá tah.

Zaměřme se napřed pouze na případ, že je k dispozici pouze jedna hromádka. Je zřejmé, že v tomto případě jednoznačně vyhrává první hráč. I přes toto zjištění si trochu zkomplikujeme situaci a nebudeme předpokládat, že hráči volí vždy nejšikovnější variantu herního postupu; prohlédněme si stromečky aspoň pro ty nejjednodušší možnosti. Případ, kdy je na hromádce jen jeden předmět, popisuje stromeček ; zde prvnímu hráči nezbývá nic jiného než vyhrát. Jinak je tomu v případě, že na hromádce jsou dva předměty, tedy ve stromečkové reprezentaci:



; zde má již druhý hráč jistou šanci. Stromeček hry s třemi předměty je ještě komplikovanější:





Vnímavější čtenář již jistě bystře odhalil, že stromeček pro čtyři předměty v sobě opět bude obsahovat všechny předchozí stromečky. To samozřejmě odpovídá i herní realitě podle toho, kolik předmětů zbývá po tahu prvního hráče. Stromečky však ještě ukazují jednu velmi zajímavou vlastnost hry NIM. Jsou naprosto souměrné, poskytují oběma hráčům naprosto tytéž možnosti v každé fázi hry, záleží pouze na pořadí, v jakém hráči provádějí své tahy, tedy z hlediska strategie je úplně vedlejší, jsem-li $L$-hráč nebo $P$-hráč, důležité je pouze, jsem-li první nebo druhý na tahu. Hrám, které mají tuto vlastnost, říkáme „nestranné hry"; vzhledem k tomu, že nestranné jsou i jednotlivé větve stromečků, užívá se i název „absolutně nestranné hry", abychom je odlišili od her, které jsou nestranné jen v některých fázích.

Strategicky lze dokázat, že jsou-li hry $G$, $H$ absolutně nestranné, pak i $G + H$ je absolutně nestranná hra. Důkaz není těžký, je jen poněkud zdlouhavý, neboť je třeba ověřit čtyři varianty podle původních strategických hodnot her $G$, $H$ ($G \leadsto 1$, $H \leadsto 1$; $G \leadsto 1$, $H \leadsto 2$; $G \leadsto 2$, $H \leadsto 1$; $G \leadsto 2$, $H \leadsto 2$).

Nyní již pro nás není těžké rozšířit hru na více hromádek. Zaměřme ale ještě svou pozornost na velmi důležitou vlastnost absolutně nestranných her: Je-li $G$ absolutně nestranná hra, pak $G + G$ je nulová hra. Důkaz tohoto tvrzení je snadný, je totiž zřejmé, že druhý hráč může vždy kopírovat tahy prvního hráče, a tedy táhne poslední. Z tohoto závažného tvrzení lze potom najít zaručenou strategii pro hru na dvou hromádkách — jsem-li na tahu, musím se snažit, aby po mém tahu bylo na obou hromádkách stejné množství předmětů.

Strategie hry na třech a více hromádkách potom plyne z uvedeného. Je-li hromádek sudý počet, vyhrává ten, kdo udržuje počty předmětů tak, aby vždy dvojice hromádek tvořila nulovou hru. Je-li hromádek lichý počet, pak je potřeba udržovat trojici hromádek, z nichž žádné dvě netvoří nulovou hru. Je to někdy trochu obtížné, ale pokud protihráč není teoreticky tak vybaven jako my, pak by to neměl být velký problém.

*Literatura:*


[1] Conway, J. H.: On Numbers and Games, Academic Press London 1976

[2] Gatiaľ J., Hecht T., Hejný M.: Hry takmer matematické, ŠMM 53 Mladá fronta Praha 1982

[3] Cihlář J., Vopravil V.: Hry a čísla, PedF Ústí n. L. 1983