

Václav Vopravil

gs@wopravil.cz

presented:

Padesát let s nadreálnými čísly

<http://www.wopravil.cz/hs>

Nadreálná čísla

1. *Konstrukce:* Necht L a R jsou množinami nadreálných čísel a necht žádný prvek množiny L není \geq žádnému prvku množiny R . Potom $\{L | R\}$ je *nadreálné číslo*. Všechna nadreálná čísla jsou vytvořena podle tohoto pravidla.
2. *Způsoby zápisu:* Pro nadreálné číslo $x \equiv \{L | R\}$ označujeme typický prvek levé množiny L jako x^L , typický prvek pravé množiny R jako x^R , a samotné číslo x píšeme jako $\{x^L | x^R\}$. Budeme-li mít například $\{a, b, c, \dots | d, e, f, \dots\}$, rozumíme tím číslo $\{L | R\}$, kde a, b, c, \dots jsou typickými prvky L a d, e, f, \dots analogicky jsou typickými prvky R .
3. *Uspořádání:* Říkáme $x \geq y$ právě tehdy, když pro žádný prvek x^R neplatí $x^R \leq y$ a pro žádný prvek y^L neplatí $x \leq y^L$.
Říkáme $x \not\geq y$ právě tehdy, když neplatí $x \leq y$.
Říkáme $x < y$ právě tehdy, když $x \leq y$ a současně $y \not\geq x$.
Říkáme $x \leq y$ právě tehdy, když $y \geq x$.
Říkáme $x > y$ právě tehdy, když $y < x$.
4. *Rovnost:* Říkáme $x = y$ právě tehdy, když $x \leq y$ a současně $y \leq x$.
5. *Sčítání, odčítání,...*

$$\begin{aligned}x + y &\equiv \{x^L + y, x + y^L | x^R + y, x + y^R\}. \\-x &\equiv \{-x^R | -x^L\}. \\x - y &\equiv x + (-y). \\xy &\equiv \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R | \\&\quad |x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}.\end{aligned}$$

Literatura

- [1] A. SIEGEL: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013.
- [2] V. VOPRAVIL, J. PORKERT: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57.
- [3] L. R. HAFF, W. J. GARNER: *An Introduction to Combinatorial Game Theory*, Lulu.com, 2ed. 2017.
- [4] A. KIRILOV, I. KLUMOVA, A. SOSINSKIJ: Сюрреальные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979).
- [5] M. ALBERT, R. NOWAKOWSKI, D. WOLFE: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*, A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA, 2007, 2019.
- [6] J. CIHLÁŘ, V. VOPRAVIL: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995.
- [7] J. H. CONWAY: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, 2001 (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983).
- [8] D. E. KNUTH: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. , Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261.
- [9] D. SCHLEICHER, M. STOLL: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006.
- [10] E. R. BERLEKAMP, J. H. CONWAY, R. K. GUY: *Winning Ways for your Mathematical Plays; Gewinnen*, Vieweg, 1985; (*Winning Ways*, Academic Press, 1982; 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004.
- [11] H.-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH (red.), *Zahlen*, Springer Verlag 1993

- [12] J. H. CONWAY, All numbers, great and small, The Univ. of Calgary Math. Research Paper No. **149**, February, 1972.
- [13] SIEGEL, A. *Combinatorial game suite*, <http://cgsuite.sourceforge.net/>, 2011.
- [14] AVIEZRI FRAENKEL, *Combinatorial Games: Selected Bibliography with a Succinct Gourmet Introduction*, <https://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds2/ds2v10-2012.pdf>
- [15] MSRI Publications – Volume 29, <http://library.msri.org/books/Book29/>
- [16] MSRI Publications – Volume 42, <http://library.msri.org/books/Book42/>
- [17] MSRI Publications – Volume 56, <http://library.msri.org/books/Book56/>
- [18] MSRI Publications – Volume 63, <http://library.msri.org/books/Book63/>
- [19] MSRI Publications – Volume 70, <https://www.cambridge.org/ca/academic/subjects/mathematics/discrete-mathematics-information-theory-and-coding/games-no-chance-5>