Donald E. Knuth
Nadreálná čísla čtená podruhé

Václav Vopravil

1. září 2013

1 Úvod

Matematik *John Horton Conway* sice jako první prozkoumal nadreálná čísla, ale Donald Knuth zveřejnil svůj úvod již v roce 1974 v matematické noveletě *Surreal numbers.*[1] Od té doby jen v anglickém jazyce knížka vyšla 19krát a byla přeložena i do mnoha světových jazyků.

O zavedení nadreálných čísel se mimo Knutha úspěšně pokusili další matematici. *Norman Alling*[2] zavedl nadreálná čísla axiómaticky, a např. *H. Gonshor*[3] použil nerekurzívní přístup pomocí posloupností. O popularizaci celé teorie má největší podíl Martin Gardner.[4] V novele *Nadreálná čísla* vystupují dva spolužáci Alice a Bill. Postupně se seznamují se základními vlastnostmi této originální teorie. Knuth v novele ukazuje pravé dobrodružství objevování matematických pravidel.

> *Na počátku všeho byla prázdnota a J. H. W. H. Conway začal tvořit čísla. I řekl Conway: „Nechť jsou dvě pravidla, která všechna čísla vytvářejí, malá i velká…“*

Alice a Bob se seznámí se dvěma pravidly, která z ničeho vytvářejí nejdříve číslo nula, stvořené z levé a pravé prázdné množiny $\varnothing$. Zjišťují vlastnosti tohoto čísla a den, kdy vznikla nula, nazývají den nuly. Dny mají v celé teorii podstatnou roli a to díky rekurzi a indukci, pomocí které se definují všechny objekty a dokazují věty. *Strukturální indukce* se používá podle stáří (složitosti) hry. Následující den stvoření vzniknou podle Conwayových pravidel další čísla, s nulou v levé nebo v pravé množině. Prozkoumají se vlastnosti nových objektů a tyto objekty se použijí jako stavební kameny pro stvoření následujících čísel.

[1] Knuth, Donald E.: *Surreal numbers* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974, vi+119pp. ISBN 0-201-03812-9 (v českém překladu Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla,* in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261)

[2] Alling, Norman L. (1987). *Foundations of Analysis over Surreal Number Fields.* Mathematics Studies 141. North-Holland. ISBN 0-444-70226-1.

[3] Gonshor, H. *An Introduction to Surreal Numbers.* Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Gardner`

Všechna čísla jsou stvořena právě tímto způsobem a každé číslo má přiřazeno den stvoření (narození). Dále nevysloveným používaným principem je *princip vyloučení třetího.* Budeme studovat, jak jsou čísla tvořena několik prvních dní a prověříme několik evidentních tvrzení. Později budeme definovat i sčítání a násobení nadreálných čísel a naše vyšetřování zakončíme konstatováním, že nadreálná čísla tvoří *nearchimédovské uspořádané 'těleso'.* Pomocí sčítání a násobení dojdeme k tvrzení, kolik nových čísel vzniká $n$tý den. Po vyšetření konečných případů přejdeme na definování obvyklých struktur, např. celých a reálných čísel. Naše vyšetřování zakončíme úvahou, jak může být teorie nadreálných čísel užitečná při analyzování her.

Naše vyšetřování nadreálných čísel věnujeme komentovanému čtení Knuthovy novely.[5] Donald Knuth je známý počítačový expert, mj. vydal dodnes používanou učebnici *The Art of Computer Programming*, ale je především autorem systému TEX. Knuth se s teorií seznámil někdy v roce 1972 při náhodném setkání s Conwayem, a objekty nazval nadreálná čísla, zatímco Conway objekty nazýval pouze čísla. Sám Conway později usoudil, že Knuthův název je lepší.

V matematice nadreálná čísla tvoří aritmetické kontinuum, obsahující jak reálná čísla, tak i nekonečně velká a nekonečně malá čísla, resp. větší a menší čísla v absolutní hodnotě než kladná reálná čísla. Nadreálná čísla mají mnoho společných vlastností s reálnými čísly (například obvyklé aritmetické operace sčítání, odčítání násobení a dělení), úplné uspořádání $\leq$ a tvoří těleso. (Přesně řečeno z hlediska teorie množin netvoří množinu ale vlastní třídu). Tvoří největší možné uspořádané těleso, tj. všechna uspořádaná tělesa, jako jsou racionální čísla, reálná čísla, těleso Levi–Civita, superreálná čísla a hyperreálná čísla, tvoří až na izomorfismus podtěleso nadreálných čísel. Nadreálná čísla obsahují i obvyklá ordinální čísla.

Ve čtení nebudeme dodržovat Knuthovo označování, protože se později neprosadilo. Budeme se držet označování podle knížek *On Numbers and games* a *Winning Way.* Především se jedná o označování řezů. Klidně bychom je mohli označovat i $[L : R]$, nebo jinak. Malá písmena vyhradíme pro označování čísel, velká pro označování množin (čísel). Někteří autoři Gonshornovu metodu popisují pomocí šipek nahoru a dolu (význam je cuknutí), což je v kolizi se standardní kladnou hrou označovanou jako $\uparrow$ a nazývanou *up,* a tomu se pokusíme vyhnout.[6] Označování objektů je užitečný nástroj pro vyšetřování (objevování, prozkoumání, analyzování) vlastností čísel. J. Conway i D. Knuth začínají s vyšetřováním vlastností čísel, které se hodily na vyšetřování koncovek hry GO. Není žádný důvod preferovat čísla, naopak. Conway většinou používá malá písmena pro čísla a velká písmena pro označování her. Ponecháváme ale označování L a R pro dolní část řezu a horní část řezu. První čeho si všimneme je, že objekty studia *vznikají postupně*, tj. v potenciálním nekonečnu. Současně vznikají obvyklé číselné objekty (přirozená, celá, ... čísla), a mimo to velké objekty (nekonečná ordinální čísla, zobecnělá celá čísla,...), vznikají i infinitesimalní čísla (nearchimédovské těleso). *Čísla vždy vystupují jako dvojice*, což je společné větě o vnoření pologrupy do grupy, čísla *vznikají spolu se svým uspořádáním a dnem narození* (generací čísel, složitost čísla).

[5]Oficiální stránku novelety nalezne čtenář na http://www-cs-faculty.stanford.edu/˜uno/sn.html.

[6]viz např. A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

Conway nebyl první, kdo se zabýval dvojicemi. Uveďme ještě dvě práce, které předcházely, a to J. Milnor: *Sums of positional games*, in Annals of Math. Study, Kuhn and Tucker, eds., Princenton, 1953, pp. 291-301; a Olof Hanner: *Mean play of sums of positional games,* Pacific Journal of Mathematics, **9** (1959), S. 81-99. Podrobně o historii CGT nalezneme v práci Richard J. Nowakowski, *History of Combinatorial Game Theory*, Proceedings of the Board Game Studies Colloquium XI, Lisbon, 2008.

2 Axiómy

Na počátku všeho byla prázdnota a J. H. W. H. Conway začal tvořit čísla. I řekl Conway: „Nechť jsou dvě pravidla, která všechna čísla vytvářejí, malá i velká. Toto budiž pravidlo první: Každé číslo nechť odpovídá dvěma množinám čísel už stvořených tak, že žádný prvek množiny levé není větší nebo roven žádnému prvku množiny pravé. A toto budiž pravidlo druhé: Jedno číslo je menší nebo rovno číslu druhému tehdy a jen tehdy, když žádný prvek z levé množiny prvého čísla není větší nebo roven druhému číslu a žádný prvek z pravé množiny druhého čísla není menší nebo roven číslu prvému.“ I prozkoumal Conway tato dvě pravidla, která vytvořil a ejhle, byla dobrá.

A prvé číslo bylo stvořeno z prázdnoty levé množiny a prázdnoty pravé množiny. I nazval Conway toto číslo „nulou“ a řekl, že bude znamením oddělujícím čísla kladná od čísel záporných. Dokázal Conway, že nula je menší nebo rovna nule a viděl že je to dobré. I byl večer, a bylo jitro, den nuly. Příštího dne byla stvořena další dvě čísla, jedno s nulou jako levou množinou a jedno s nulou jako pravou množinou. I nazval Conway prvé číslo „jedničkou“ a druhé nazval „minus jedničkou.“ A dokázal, že minus jednička je menší, ale nerovna nule a nula že je menší, ale nerovna jedné. A byl večer...

Hodně netrpělivý čtenář se může nyní pokusit o řešení následujících úloh:

Úloha 2.1. Doplňte prázdná místa ? : 'Množina' $\mathbb{N}\mathrm{o}$ všech čísel je definována (rekurzívně) pomocí dvou následujících pravidel:

1. $x = \left\{X^L \mid X^R\right\} \in \mathbb{N}\mathrm{o}$ právě tehdy a jen tehdy, když:
   - $X^L \subset$? ,
   - $X^R \subset$? ,
   - $(\forall x^L \in X^L)(\forall x^R \in X^R)\ x^L$? x^R.
2. Pro každá dvě čísla $x = \left\{X^L \mid X^R\right\} \in \mathbb{N}\mathrm{o}$ a $y = \left\{Y^L \mid Y^R\right\} \in \mathbb{N}\mathrm{o}$ platí:

$$x \leq y \Leftrightarrow (\forall x^L \in X^L)\ x^L \ ?\ y \wedge (\forall y^R \in Y^R)\ x \ ?\ y^R.$$

Úloha 2.2. (Čísla) Dokažte, že následující objekty jsou čísla:

1. $\{\varnothing \mid \varnothing\}$, které označíme 0,
2. $\{\{0\} \mid \varnothing\}$, které označíme 1,
3. $\{\varnothing \mid \{0\}\}$, které označíme -1,
4. $\{\{1\} \mid \varnothing\}$, které označíme 2,

5. $\{\{0,1\} \mid \varnothing\}$, které označíme d,
6. $\{\{-1\} \mid \{1\}\}$, které označíme z,
7. $\{\{2\} \mid \varnothing\}$, které označíme 3,
8. $\{\{n\} \mid \varnothing\}$, které označíme n',
9. $\{\{0,1,2,3,\ldots\} \mid \varnothing\}$, které označíme ω,
10. $\{\{0,2,4,6,\ldots\} \mid \varnothing\}$, které označíme o,
11. $\{\{0,1,4,9,16,\ldots\} \mid \varnothing\}$, které označíme w,
12. $\{\{0\} \mid \{1\}\}$, které označíme p.

Úloha 2.3. (Uspořádání) Píšeme $x \equiv y$ právě tehdy a jen tehdy, když $x \le y$ a $y \le x$. Zápis $x < y$ znamená $x \le y$ a současně $x \not\equiv y$. Dokažte:

1. $0 \le 0$,
2. $0 \le 1$,
3. $1 \not\le 0$,
4. $2 \equiv d$,
5. $0 \equiv z$,
6. $0 < 1$ (Dokažte dvě tvrzení: $0 \le 1$ a $1 \not\le 0$.),
7. $-1 < 0$ (Dokažte dvě tvrzení: $-1 \le 0$ a $0 \not\le -1$.),
8. $-1 < 1$ (Pozor, ještě nevíme, zda i relace $<$ je tranzitivní!)
9. $\omega \equiv w (\equiv o)$, (Je relace $\equiv$ tranzitivní?)
10. Dokažte $-1 < 0 < 1$!
11. Porovnejte $\{0,1 \mid 2,3\}$ a $\{-1 \mid 1\}$.

Úloha 2.4. (a tak dále...) Jak jsou čísla $2,3,4,5,\ldots,p$ a ω uspořádána? Kolik je $p+p$? Další zajímavé číslo je $p_2 = \{\{0\} \mid \{p\}\}$, $p_{n'} = \{\{0\} \mid \{p_n\}\}$, nebo i $\varepsilon = \{\{0\} \mid \{1,p,p_2,p_3,\ldots\}\}$. Jsou to opravdu čísla? Kde leží?

Úloha 2.5. (a tak dál...) Dokažte:

1. $\{\omega \mid\} \equiv \omega + 1 \equiv 1 + \omega \not\equiv \omega$
2. $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \mid\} \equiv \omega + \omega \equiv 2\omega$
3. $\{1,2,3,\ldots \mid \omega\} \equiv \omega - 1 < \omega$
4. $\{1,2,3,\ldots \mid \omega, \omega-1, \omega-2, \ldots\} \equiv \omega/2 < \omega$
5. Protože $\sqrt{\omega} \equiv \{0,1,2,\ldots \mid \omega/1, \omega/2, \omega/3, \ldots\}$, dokažte $\sqrt{\omega} \cdot \sqrt{\omega} \equiv \omega$.
6. Definujte ω^2.

3 Co jsou nadreálná čísla?

3.1 Dvě Conwayova pravidla

Jak ukázala nalezená kamenná deska, čísla jsou vytvářena po generacích (dnech narození). Každé nadreálné číslo je vytvořeno v určitý den a dále se reprodukuje do následujících dnů. Den narození je to nejmenší číslo dne, ve kterém číslo vzniklo. Každé číslo odpovídá dvojici množin, levé a pravé, které se označují X^L a X^R a píše se

$$x = \{X^L \mid X^R\}.$$

Nyní popíšeme nadreálná čísla $\mathbb{N}\mathrm{o}$ pomocí dvou axiómů tak, jak je zavedl J. Conway:

Axióm 3.1. Každé nadreálné číslo odpovídá dvěma množinám dříve vytvořených čísel. Žádný prvek levé množiny není větší nebo roven žádnému prvku z pravé množiny.

Poznámka: V této definici je třeba 'není větší nebo rovno' nebo lépe 'není větší ani rovno' brát jako primitivní predikát. Dosud nevíme, co to je rovno. Později se dokonce ukáže, že rovno není predikát $=$.
Poznámka: Označení: Je-li $x = \{X^L \mid X^R\}$, potom pro každé $x^L \in X^L$ a $x^R \in X^R$ platí $x^L \not\geq x^R$. Tuto podmínku také zapisujeme $X^L \not\geq X^R$.

Axióm 3.2. Číslo je menší nebo rovno jinému číslu právě tehdy a jen tehdy, pokud levá množina prvního čísla není větší a ani rovna druhému číslu a pravá množina druhého čísla není menší ani rovna prvnímu číslu.

Poznámka: Tak jako byla kamenná deska nalezena se zákony, tak nutně přijímáme dva axiómy. Oba axiómy neodporují našemu pohledu na některá čísla. Zatím nemáme vytvořenu představu, jak je struktura bohatá. Rovnost používáme jako primitivní predikát označující definování, jako totožnost a pod. Používáme dále na rozdíl od originálu složené závorky, místo kulatých a horní indexy, na rozdíl od původních dolních indexů. Typograficky také nezanecháváme stejnou relaci menší nebo rovno. Místo $x \leq y$ píšeme také $y \geq x$ a pod.
Poznámka: Když se zavede bezeslovná varianta definice čísel pomocí znaku $\leq$, resp. $\geq$, je později elegantně možné dokázat, že tato relace odpovídá relaci *menší* nebo *rovno*. To je možné zavést až po definování relace ekvivalence (kongruence), zde relace $\equiv$, a po relaci $<$.
Poznámka: Hra $\{X^L \mid X^R\} = x \leq y = \{Y^L \mid Y^R\}$ právě tehdy a jen tehdy, pokud $X^L \not\geq y$ a současně $x \not\geq Y^R$. $X^L \not\geq y$ znamená, že žádná levá část x není $\geq$ y, tj. $(\forall x^L \in X^L)\ x^L \not\geq y$, a podobně dále.

3.2 Den nuly

Pokud každé číslo odpovídá dvojici dříve vytvořených množin čísel, tak jak začít od počátku? Nultý den máme jistě k dispozici prázdnou množinu $\varnothing$ a budeme definovat nulu jako $0 = \{\varnothing \mid \varnothing\}$. Nula 0 je číslo tvořené dvěma prázdnými množinami $0^L, 0^R = \varnothing$, žádný prvek levé části nemůže být větší, nebo menší, než cokoliv, protože takový prvek neexistuje (vlastnosti prázdné množiny). Nulu budeme zapisovat jednodušeji, a to

$$0 = \{|\}.$$

Druhý axióm upřesňuje relaci $\leq$. Můžeme vyzkoušet, zda alespoň

$$0 \leq 0$$

opět pomocí vlastností prázdné množiny. Podle druhého axiómu $0 \leq 0 \Leftrightarrow 0^L \not\geq 0 \wedge 0 \not\geq 0^R$. Protože se odkazujeme na prvky prázdné množiny (0^L ani 0^R neexistují), tvrzení je splněno triviálně, prvky nemohou být větší a ani menší než cokoliv. Tím jsme zatím vyčerpali možnosti nultého dne, dne vzniku 0.

Poznámka: Levé (pravé) části čísla jsou množinami a každé číslo v takové množině je opět dvojicí množin čísel. Každý prvek levé (pravé) množiny musel být stvořen předem, atd. Na počátku máme k dispozici prázdnou množinu, a podle druhého axiómu nám obecný kvantifikátor zabezpečí platnost $\varnothing \not\geq \varnothing$. Jestliže levá (pravá) množina je prázdná, je podmínky $X^L \not\geq X^R$ splněna ze stejného důvodu triviálně, což znamená, že se dá stvořit nekonečně mnoho čísel.

Poznámka: Místo množiny jsme začali psát úsporně a to pouze prvky množin. Je to výhodné a vyhneme se často zápisům s mnoha závorkami.

3.3 Den jedné a tak dále

Následující první den vzniknou objekty pomocí množin z nultého dne (použitím axiómu (3.1)). Nulu použijeme pro levou, nebo/a pravou množinu a dostaneme $x = \{0 \mid\}$, $y = \{\mid 0\}$ a $\{0 \mid 0\}$. Poslední dvojice $\{0 \mid 0\}$ není číslo, protože odporuje druhé vlastnosti axiómu (3.1) (není pravda $0 \not\geq 0$, jak jsme již dokázali). Věnujme se nyní x. Podle axiómu (3.1) je x číslo (díky pravé prázdné množině). Porovnáme nyní x s 0 podle druhého axiómu. Mohlo by platit $0 \leq x$. Podle druhého axiómu by to nastalo, pokud by $0^L \not\geq x \wedge 0 \not\geq X^R$. Oba dva výroky v konjunkci platí opět díky vlastnostem prázdné množiny (0^L i X^R jsou prázdné množiny). Číslo x není to samé jako 0 (platí $x \neq 0$). Platí také $x \not\leq 0$? Sporem předpokládejme, že $x \leq 0$. Protože x je číslo, použijeme druhé tvrzení prvního axiómu a dostaneme konjunkci $X^L \not\geq 0, x \not\geq 0^R$. První tvrzení je nepravdivé, protože $0 \geq 0$. Principem maximální jednoduchosti označme x také jedničkou 1 a budeme říkat, že toto číslo vzniklo ve dne jedna.

Analogicky je možné dokázat, že $y \leq 0$ a $0 \not\leq y$. Číslo y se označuje -1 a nazývá minus jedna. Takže první den vzniknou dvě nová čísla 1 a -1. Jaký je vztah těchto dvou čísel? Platí třeba $y \leq x$, tj. $-1 \leq 1$? Tuto otázku si musíme položit, protože zatím nevíme, zda $\leq$ je tranzitivní relací. Tvrzení opět platí, díky prázdným množinám -1^L a 1^R. Takže již víme, že prvního dne vznikne

$$\{\mid 0\} = -1 \leq 0,\ -1 \leq 1 \text{ a } 0 \leq 1 = \{0 \mid\},$$

a ne naopak.

Poznámka: Znak -1 je nedělitelný znak a zatím nemůže být opačným prvkem, nebo souviset s odčítáním čísel.

Poznámka: Díky vlastnostem prázdné množiny dokonce platí obecné tvrzení o nadreálných číslech: Jestliže X a Y jsou množinami čísel, potom $\{\varnothing \mid X\}$, a $\{Y \mid \varnothing\}$ jsou čísla, a navíc $\{\varnothing \mid X\} \leq \{Y \mid \varnothing\}$. Prvky množin $\varnothing^L, \varnothing, \varnothing^R$ totiž neexistují. Nula odděluje kladná a záporná čísla, čísla tvaru $\{Y \mid \varnothing\}$ jsou nezáporná. Mělo by platit $\{Y \mid \varnothing\} \geq 0$, což nastane, když $0^L \not\geq \ldots \wedge 0 \not\geq \varnothing$. Obě podmínky jsou splněny automaticky.

Poznámka: Víme, že 0 byla vytvořena dříve, než 1 a -1. Obecněji, pokud číslo x je obsaženo v čísle y, potom číslo x muselo být vytvořeno dříve než y. (Stavební materiál.)

Definice 3.3. Říkáme, že číslo x je jednodušší než číslo y právě tehdy a jen tehdy, když číslo x vzniklo dříve než y.

Příklad: Číslo 0 je jednodušší než 1 a -1.
Poznámka: Relace *být jednodušší* je dobré uspořádání.

Dříve narozená čísla můžeme nyní použít v následující druhý den k novým číslům, dostaneme 20 nových čísel.

$$\begin{gathered}\{|\} = 0,\ \{|\ -1\},\ \{|\ 0\} = -1,\ \{|\ 1\},\\ \{|\ -1, 0\},\ \{|\ -1, 1\},\ \{|\ 0, 1\},\ \{|\ -1, 0, 1\},\\ \{-1\ |\},\ \{-1\ |\ 0\},\ \{-1\ |\ 1\},\ \{-1\ |\ 0, 1\},\ \{0\ |\} = 1,\ \{0\ |\ 1\},\ \{1\ |\},\\ \{-1, 0\ |\},\ \{-1, 0\ |\ 1\},\ \{-1, 1\ |\},\ \{0, 1\ |\},\ \{-1, 0, 1\ |\}.\end{gathered}$$

Některá čísla již známe, prozkoumáme nyní vztahy mezi těmito čísly.

Poznámka: Můžeme vytvořit více objektů, ale ne všechny jsou čísla. (Použili jsme pravidlo, že levá část nemůže být větší ani rovna pravé části, tj. $-1 \not\geq 0, -1 \not\geq 1, 0 \not\geq 1$.) Tato čísla můžeme použít v následující den pro další a další čísla atd. Tímto postupem vyčerpáme všechna (nadreálná) čísla. Je otázkou, jaké vlastnosti mají tyto objekty, tj. porovnáme objekty s běžnými, třeba celými, čísly.

3.4 Relace $\leq$

Poznámka: Seznámíme se základními vlastnostmi a s důkazovou technikou podle dnů stvoření (narozeninový princip).

Předpokládejme, že x, y a z jsou čísla taková, že $x \leq y$ a $y \leq z$. Plyne odtud, že také $x \leq z$? Splňuje relace $\leq$ tranzitivní zákon?

Věta 3.4. *(Tranzitivnost) Je-li $x \leq y$ a $y \leq z$, potom také $x \leq z$.*

Důkaz: (Sporem) Nechť $x = \{X^L \mid X^R\}, y = \{Y^L \mid Y^R\}$ a $z = \{Z^L \mid Z^R\}$ jsou prvními trojicemi (nejjednoduššími), pro které tvrzení věty neplatí, tj. platí $x \leq y$, $y \leq z$ a $x \not\leq z$. Z poslední nerovnosti plynou dvě podmínky, 1) buď existuje nějaké $x^L \in X^L$ tak, že $x^L \geq z$ nebo 2) existuje nějaké $z^R \in Z^R$ tak, že $z^R \leq x$. Například: platí $x \leq y \wedge y \leq z \ \wedge z \leq x^L$, z posledních dvou je tedy $y \leq x^L$, což je ve sporu s prvním tvrzením $x^L \not\geq y \ldots$ Tato trojice (x^L, y, z) je ale jednodušší než nejmenší, pro které tranzitivnost neplatí. Zbylý důkaz (2) je analogický, spor. □

Poznámka: Uvidíme ještě mnohokrát jakou důležitou roli hraje metoda indukce v teorii nadreálných číslech. Protože nadreálná čísla jsou tvořena po dnech narození, lze použít indukci právě v den, kdy dané číslo nebo čísla byla narozena a najít všechna jednodušší čísla, předcházející. Podle indukčního principu, pokud všechny jednodušší čísla v x splňují vlastnost P, potom x splňuje vlastnost P.

Již dříve jsme se přesvědčili, že $0 \leq 0$. Nyní tento výsledek zobecníme v následující větě:

Věta 3.5. *(Reflexivnost)* $x \leq x$.

Důkaz: (Sporem podle dne narození) Předpokládejme, že máme nejjednodušší číslo x, pro které platí $x \nleq x$, tzn. buď 1) existuje $x^L \in X^L$ tak, že $x^L \geq x$ nebo 2) existuje $x^R \in X^R$ tak, že $x \geq x^R$. Nejdříve předpokládejme (1). Podle definice $\leq$ nutně pro každé $x^L \in X^L$ je $x^L \ngeq x^L$ a tedy ještě jednodušší číslo porušuje reflexivnost. Spor ve druhém případě je analogický. $\square$

Ukážeme, že každé číslo leží mezi svou levou a pravou stranou. Jak porovnáme levou a pravou stranu? Předpokládejme, že $X^R \leq x$. Potom podle axiómu 3.2 to znamená, že také $X^R \ngeq X^R$, což je spor, protože $x^R \leq x^R$ pro každé $x^R \in X^R$ a tedy platí $X^R \nleq x$. Případ $x \nleq X^L$ se dokáže stejným způsobem.

Poznámka: Nyní již víme, že také platí $x^L \ngeq x \ngeq x^R$,

Věta 3.6. *Je-li x číslo, potom $X^L \leq x \leq X^R$.*

Důkaz: (Sporem indukcí podle dne narození) Předpokládejme, že existuje nějaké $x^L \in X^L$ tak, že $x^L \nleq x$. Podle definice to znamená, že existuje nějaké $x^L \in X^L$ tak, že $x^L \geq x$ nebo nějaké číslo $x^R \in X^R$ tak, že $x^R \leq x^L$. Poslední tvrzení je ve sporu s axiómem 3.1. Indukcí předpokládáme, že $x^{LL} \leq x^L$. Podle tranzitivnosti dostaneme také $x \leq x^L$ (protože $x \leq x^{LL}$ a $x^{LL} \leq x$). Ovšem $x \leq x^L$ znamená $X^L \ngeq x^L$, což je spor ($x^L \in X^L$). Takže takové x^L neexistuje a platí $X^L \leq x$. Druhý případ $x \leq X^R$ je analogický. $\square$

Poznámka: Vraťme se ještě jednou k předcházejícímu důkazu tranzitivnosti. V jistou dobu jsme předpokládali, že platí konjunkce jednodušších čísel $x \leq y \wedge y \leq z \ \wedge z \leq x^L$. Z posledních dvou tvrzení také platí $y \leq x^L$ a spolu s prvním tvrzení také platí $x \leq x^L$ (spor s reflexivností relace $\leq$). V důkazu o reflexivnosti relace $\leq$ jsme v jistou chvíli měli 1) existující x^L a 2) všechna x^L a označili jsme oba objekty stejně. Je jasné, že když platí pro (2) všechna, tak by mělo platit i pro (1) existující. Asi by bylo lepší v důkazu obě x^L označit různě.

Ukázali jsme, že každé číslo lze porovnat samo se sebou. Tato vlastnost platí i pro libovolná dvě čísla. Nadreálná čísla nemají neporovnatelné prvky.

Věta 3.7. *Pro každá dvě čísla x a y, je-li $x \nleq y$, potom $y \leq x$.*

Důkaz: (Sporem) Předpokládejme, že existují dva neporovnatelné prvky x a y, tj. platí $x \nleq y$ a $y \nleq x$. Potom z prvního vztahu musí buď platit 1) $x^L \geq y$ nebo 2) $x \geq y^R$. Víme, že $x^L \leq x$ a podle (1) a tranzitivnosti, je $x \geq x^L \geq y$, tedy $y \leq x$ (spor). Stejným způsobem dosáhneme i sporu ve druhém případě. $\square$

Poznámka: Věta 3.7 má velmi blízko k neostrému lineárnímu uspořádání. K tomu potřebujeme mimo tranzitivnosti a reflexivnosti ještě rovnost (díky antisymetričnosti).

Místo $x \nleq y$ budeme psát jednoduše $y < x$. Podobně pro $>$. Tato úmluva nám pomůže vyslovit předcházející větu v její silnější podobě.

Věta 3.8. *Je-li x číslo, potom $X^L < x < X^R$.*

Poznámka: Platí také $-1 < 0$ a $0 < 1$, tj. $-1 < 0 < 1$. Poslední vlastnost je důsledkem tranzitivnosti. Dokážeme první tvrzení. Platí $-1 \leq 0$ a $-1 \neq 0$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

Poznámka: Záměna $\not\leq$ za $>$ nám umožňuje vyslovovat pravidla přímo bez toho, abychom se vyjadřovali negativně. Podmínky prvních dvou axiómů přejdou do tvarů $X^L < X^R$ a $X^L < y \wedge x < Y^R$.

Poznámka: Důsledkem je třeba i toto tvrzení: $x < y \wedge y \leq z \;\Rightarrow x < z$. Přepíšeme-li požadavek v negativní formě a sporem budeme předpokládat, že $x \not\geq y \wedge y \leq z \;\wedge x \geq z$. Z posledních dvou členů konjunkce díky tranzitivnosti dostaneme $x \geq y$, které je ve sporu s prvním členem. Jiným důsledkem je $x \leq y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

Je možné mít dvě různá čísla x a y tak, aby současně platilo $x \leq y$ a $y \leq x$? Stačí položit $x = \{0, 1 \mid\}$ a $y = \{1 \mid\}$, protože: 1) dokážeme $\{0, 1 \mid\} \leq \{1 \mid\}$ a 2) $\{0, 1 \mid\} \geq \{1 \mid\}$. Nejdříve (1) by znamenalo $0 \not\geq \{1 \mid\}$ a $1 \not\geq \{1 \mid\}$ a třetí možnost je splněna díky tomu, že $\{1 \mid\}^R$ neexistuje. První nerovnost je splněna, protože $1 \geq 0$ a druhá také, protože $1 \geq 1$. Případ (2) se dokazuje analogicky. Takový příklad jsme mohli nalézt pouze u čísel nejméně druhého dne.
Poznámka: Tvrzení je známé také jako věta o redukci levých (pravých) možností.
Poznámka: Je možné se přesvědčit, že také například dvojice $x = \{-1 \mid 1\}$ a $y = 0$ vyhovuje předcházející konjunkci (věta o nejstarším prvku).

3.5 Relace $\equiv$

Číslo nula jakoby vznikala v ekvivalentním zápisu znova a znova. V jistém smyslu jsou to sice prvky x, y různé, ale nerozeznatelné. Obecně budeme říkat, že *číslo x je jako číslo y* právě tehdy a jen tehdy $x \leq y$ a současně $y \leq x$. Relaci *je jako* budeme zapisovat obvykle $\equiv$. Relace $x \equiv y$ je ekvivalence (dokonce kongruence) na číslech. Je ještě potřeba dokázat jedno tvrzení, a to, že nezávisí na volbě reprezentantů. Pokud dvě čísla mají levé a pravé množiny v relaci je jako, potom i čísla jsou v relaci je jako, tj. je-li $x^L \equiv y^L$ a $x^R \equiv y^R$ pro dvě čísla $x = \left\{X^L \;\middle|\; X^R\right\}$ a $y = \left\{Y^L \;\middle|\; Y^R\right\}$, potom $x \equiv y$. Tvrzení dokážeme jako následující větu (vybereme-li jiné reprezentanty, hodnota čísla se nezmění).

Věta 3.9. *Nechť x a y jsou různá čísla, ale jejich levá a pravá možnost jsou jako ($\equiv$). Potom $x \equiv y$.*

Poznámka: Máme nějaká $x'^L \equiv x^L$, $x'^R \equiv x^R$, $y'^L \equiv y^L$ a $y'^R \equiv y^R$. Potom $x \leq y \wedge y \leq x$. Věta plyne z nerovnosti: $x'^L \leq x^L \leq x \leq x^R \leq x'^R$ a $y'^L \leq y^L \leq y \leq y^R \leq y'^R$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky. Věta říká, že vezmeme-li ekvivalentní reprezentanty dvou čísel, hodnota čísla se nezmění.

3.6 Jaká čísla vznikají $n$tého dne

Druhého dne jsme nalezli dvacet čísel. Některá čísla, jak jsme již ukázali, mají různé reprezentanty. Tak například jsme již prověřili, že platí $\{-1 \mid 1\} \equiv 0$ nebo $\{0, 1 \mid\} \equiv \{1 \mid\}$.

Znamená to, že skutečně vzniklých nových čísel druhého dne bude méně. Která nová čísla vzniknou?

Na tuto otázku budeme umět odpovědět, budeme-li mít představu, jak nadreálná čísla vznikají. Samozřejmě můžeme pokračovat naznačeným způsobem a porovnávat jednotlivá čísla s -1, 0 a 1 (druhého dne vznikla čísla pomocí $\varnothing, 0, -1$ a 1). Tento proces by byl ale zdlouhavý, a to zvlášť, budeme-li tak postupovat do následujících dnů. Budeme chtít nalézt nějaký snazší postup. Uvažujme nyní číslo $x = \{X^L \mid X^R\}$. Při porovnávání s ostatními čísly si můžeme všimnout, že na příliš malých číslech vlevo a příliš velkých čísel vpravo nezáleží (věta o redukci levých/pravých možností). Platí to i naopak, přidáme-li vlevo (vpravo) čísla menší (větší), hodnota čísla se nezmění. Budeme-li mít nějaké dvě množiny čísel Y^L a Y^R takové, že $Y^L < x < Y^R$, potom lze očekávat také, že číslo $\{Y^L \cup X^L \mid X^R \cup Y^R\}$ má stejnou hodnotu jako x. Ostatně číslo x je také jednodušší. Číslo x je první číslo vzniklé mezi svou levou a pravou stranou $Y^L \cup X^L < x$ a $x < X^R \cup Y^R$. Číslo z je nejstarší, pokud $X^L < z < X^R$ a pro Z^L a Z^R tato nerovnost neplatí.

Věta 3.10. *(Simplicity theorem, věta o nejstarším prvku) Nechť $x = \{X^L \mid X^R\}$ je číslo a nechť $z = \{Z^L \mid Z^R\}$ je nejstarší číslo mezi X^L a X^R. Potom $x \equiv z$.*

Důkaz: Podmínka $X^L < z < X^R$ nesmí platit pro žádné jednodušší číslo. Chceme dokázat, že platí $x \equiv z$, tedy $x \leq z \wedge z \leq x$. Dokážeme nejdříve první tvrzení. Dostaneme $x \leq z \Leftrightarrow X^L \ngeq z \wedge x \ngeq Z^R \Leftrightarrow X^L < z \wedge x < Z^R$. První člen závěrečné konjunkce předpokládáme, platnost druhého členu dokážeme sporem. Nechť tedy platí $Z^R \leq x$, pak platí $X^L < z < Z^R \leq x < X^R$, a tedy také $X^L < Z^R < X^R$, což je spor s druhým předpokladem věty. Druhé tvrzení $z \geq x$ se dokáže obdobně. $\square$

Poznámka: Například $\{1 \mid\} \equiv \{0, 1 \mid\} \equiv \{-1, 0, 1 \mid\} \equiv \{-1, 1 \mid\}$, a pod. Druhého dne vzniknou právě čísla:

$$\{\mid -1\} < -1 < \{-1 \mid 0\} < 0 < \{0 \mid 1\} < 1 < \{1 \mid\}. \tag{1}$$

Věnujme se pravidelnosti. Nultý den vznikne pouze právě

$$\{\mid\} = 0.$$

První den vzniknou dvě nová čísla

$$\{\mid 0\} \text{ a } \{0 \mid\},$$

které jsme označili -1 a 1. Zjistili jsme, že

$$-1 < 0 < 1.$$

Následující druhý den vznikla nová čísla

$$\{\mid -1\} < \{-1 \mid 0\} < \{0 \mid 1\} < \{1 \mid\}.$$

Výsledek zobecníme do věty o zaplňování prázdných míst.

Věta 3.11. *Předpokládejme, že nějaký ntý den vznikla čísla*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m.$$

Potom nová čísla $(n+1)$ *dne jsou právě*

$$\{\mid x_1\}, \{x_1 \mid x_2\}, \{x_2 \mid x_3\}, \ldots, \{x_{m-1} \mid x_m\}, \{x_m \mid\}.$$

Důkaz: Pomocí věty o nejstarším prvku (seniority princip) víme, že pokud jedna nebo obě množiny X^L a X^R jsou množinami s více než jedním číslem, potom $\left\{X^L \mid X^R\right\} \equiv \left\{\max(X^L) \mid \min(X^R)\right\}$ a budeme chtít dokázat, že následujícího dne vzniknou čísla tvaru $\{\mid x_1\}$, $\{x_m \mid\}$ nebo tvaru $\{x_i \mid x_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$, podobně, jako vznikla čísla předcházejícího dne. Důkaz rozdělíme na čtyři části:
1. případ (čísla vedle sebe): Uvažujme číslo $\{x_{i-1} \mid x_{i+1}\}$ pro $i = 2, \ldots, m-1$. Pokud $x_i = \left\{X_i^L \mid X_i^R\right\}$, potom $X_i^L \leq X_{i-1}$ a $x_{i+1} \leq X_i^R$ a tedy také $x_{i-1} < x < x_{i+1}$. Podle věty o nejstarším prvku $x_i \equiv \left\{X_i^L, x_{i-1} \mid X_i^R, x_{i+1}\right\}$. Podobně platí také $\{x_{i-1} \mid x_{i+1}\} \equiv \left\{X_i^L, x_{i-1} \mid X_i^R, x_{i+1}\right\}$. Podle tranzitivnosti relace $\equiv$ je také $x_i \equiv \{x_{i-1} \mid x_{i+1}\}$.
2. případ (nejsou bezprostředně vedle sebe): Uvažujme číslo $\{x_{i-1} \mid x_{j+1}\}$, pro $i < j$. Pokud máme číslo $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ takové že $X^L \leq x_{i-1}$ a $X^R \geq x_{j+1}$, platí ze stejného důvodu jako z předcházejícího důvodu $\{x_{i-1} \mid x_{j+1}\} \equiv x$. Pokud x je první číslo vytvořené z $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, potom levá a ani pravá možnost nemůže obsahovat žádný prvek z tohoto seznamu, což splňuje naše požadavky.
3. případ (krajní číslo) Uvažujme číslo $\{\mid x_{j+1}\}$, potom jako v předcházejícím případě je $\{\mid x_{j+1}\} \equiv x$, kde x je první číslo vytvořené z $x_1, x_2, \ldots, x_j$.
4. případ je analogický předcházejícímu. $\square$

Poznámka: Podle této věty známe všechna čísla, která vzniknou v libovolný konečný den. Jednak se reprodukují původní čísla, potom vzniknou čísla na konci a mezi. Nultý den vznikla nula 0 (tj. $2^1 - 1 = 1$ číslo). První den $2^2 - 1 = 3$ a druhý den $2^3 - 1 = 7$ čísel. Každý den se zdvojuje počet nových čísel a posloupnost všech čísel po dnech je $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ Předpokládejme, že po n dnech máme $2^{n+1} - 1$ čísel. Následující den ještě navíc dostaneme $2^{n+1} - 1 + 1$, tj. $2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$. Indukcí je vidět, že toto pravidlo platí pro libovolný (konečný) den n. Platí tedy věta:

Věta 3.12. *Nechť* n *je (konečné) přirozené číslo. Potom ntý den je vytvořeno právě* $2^{n+1} - 1$ *čísel.*

4 Pseudočísla

Oblast čísel je poměrně hodně omezena druhou podmínkou axiómu 3.1. Co by se stalo bez této podmínky? Například objekt $\{1 \mid -1\}$ není číslo $(1 > -1)$, ani $\{0 \mid 0\}$ není číslo $(0 \not\leq 0)$. Tyto objekty nazýváme pseudočísla (*hry*). Pseudočísla můžeme porovnávat pomocí axiómu 3.2, např. $\{0 \mid 0\} < 1$, protože $0 \not\geq 1 \wedge 1 \geq 0$ (zbylé výpočty jsou s prázdnou množinou $\varnothing$).

Pseudočíslo $\{0 \mid 0\}$ nelze porovnávat s 0, stejně jako $\{1 \mid -1\}$, protože neplatí $\{0 \mid 0\} \leq 0$ ani $0 \leq \{0 \mid 0\}$. Pseudočísla nejsou (ani lineárně) uspořádána, ale relace $\leq$ na pseudočíslech je kvaziuspořádání.

Pseudočíslo $\{0 \mid 0\}$ není číslo a označuje se $*$. Platí $* \neq 0$, $*+* \equiv 0$, a tedy $-* \equiv *$. $n+* \equiv \{n \mid n\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pseudočíslo $\{0 \mid *\}$ je kladné a označuje se $\uparrow$, pseudočíslo $\{* \mid 0\}$ záporné a označuje se $\downarrow$. $\{\uparrow \mid \downarrow\} \equiv \{\uparrow \mid 0\} \equiv \{0 \mid \downarrow\} \equiv \{0 \mid 0\} \equiv *$. $\uparrow + * \equiv \{0, * \mid 0\}$. Poznamenejme, že pseudočíslo $\{1, * \mid\}$ není číslo, přestože má hodnotu 2.

Poznámka: Přestože pseudočísla mají jiné vlastnosti než-li nadreálná čísla, přesto některé věty platí i pro pseudočísla, například reflexivnost relace $\leq$ a tím i $X^L \not\geq x \wedge x \not\geq X^R$, a také třeba tranzitivnost relace $\leq$. V důkazech jsme nepoužili druhou vlastnost 3.1. Dále se budeme zabývat pouze nadreálnými čísly (splňující druhou vlastnost axiómu 3.1), i když některá tvrzení platí obecněji.

5 Další axiómy

Alice a Bob nalezli další kamennou desku.

> *. . . dne. I řekl Conway: „Nechť čísla se k sobě přičítají tímto způsobem: Levá množina součtu dvou čísel budiž tvořena součty všech levých částí každého čísla s číslem zbývajícím a stejným způsobem pravá množina budiž z pravých částí, každá podle druhu svého.“ Dokázal Conway, že každé číslo přičteno k nule zůstává nezměněno a viděl, že sčítání je dobré. A byl večer a bylo ráno, den třetí.*
>
> *I řekl Conway: „Nechť zápor nějakého čísla má jako svoje množiny zápory opačných množin tohoto čísla a nechť odčítání je přičítání záporu.“ A stalo se, Dokázal Conway, že odčítání je opakem sčítání a to bylo velmi dobré.*
>
> *A byl večer a bylo ráno, den čtvrtý.*
>
> *I řekl Conway číslům: „Buďte plodná a násobte se. Nechť část prvního čísla je násobena druhým číslem a přičtena k součinu prvního a části druhého čísla a nechť součin těchto částí je odečten. Toto budiž uděláno všemi možnými způsoby, jsou-li obě části stejného druhu, bude získáno číslo z levé množiny součinu, ale z pravé množiny, jsou-li druhu opačného."Dokázal Conway, že každé číslo násobeno jednou zůstává nezměněno.*
>
> *A byl večer a bylo ráno, den pátý.*
>
> *A ejhle! Když byla čísla tvořena nekonečně mnoho dní, objevil se samotný vesmír.*
>
> *A byl večer a bylo ráno, den $\aleph$.*
>
> *I přehlédl Conway všechna pravidla, která pro čísla stvořil a viděl, že jsou velmi, velmi dobrá. I nařídil jim, aby souhlasila se znaménky a řadami a podíly a kořeny.*
>
> *Tu potom povstalo nekonečné číslo menší než nekonečno. A nekonečna dnů dala vznik násobným řádům nekonečen.*

5.1 Opačná čísla

Nejdříve budeme definovat opačná nadreálná čísla.

Definice 5.1. (opačné číslo) Nechť $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ je číslo. Potom opačné číslo je

$$-x = \left\{-(X^R) \mid -(X^L)\right\}.$$

Příklad: Například $-0 = 0$, $-\{1 \mid\} = \{\mid -1\}$, $-\{0 \mid 1\} = \{-1 \mid 0\}$ a třeba $\{\mid 0\} = -1 = -\{0 \mid\}$, a tedy opačný prvek k 1 je -1. Druhého dne vzniknou právě (viz (1)). Vzniknou tedy i symetrická čísla.

$$-\{1 \mid\} < -1 < -\{0 \mid 1\} < 0 < \{0 \mid 1\} < 1 < \{1 \mid\}. \tag{2}$$

Věta 5.2. *(involuce opačného prvku)* $-(-x) = x$.

Důkaz: (indukcí) Vezměme libovolně $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$. Potom

$$-(-x) = -\left\{-X^R \mid -X^L\right\} = \left\{-(-X^L) \mid -(-X^R)\right\},$$

díky indukčnímu předpokladu je také

$$\left\{-(-X^L) \mid -(-X^R)\right\} = \left\{X^L \mid X^R\right\} = x.$$

□

Je také ale opačné číslo nadreálným číslem? To znamená, ptáme se, zda pro nadreálné číslo x je také $-x$ nadreálné číslo. Víme, že $X^L < X^R$ a chceme dokázat, že platí $-X^R < -X^L$. Tato vlastnost okamžitě plyne z následující věty.

Věta 5.3. $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$.

Důkaz: Dokážeme jednu stranu ekvivalence, druhá strana se dokazuje obdobně. (Indukcí) $x \leq y$ znamená také podle definice $\leq$ platnost $X^L \not\geq y \wedge x \not\geq Y^R \Rightarrow X^L < y \wedge x < Y^R \Rightarrow -y < -X^R \wedge -Y^L < -x \Rightarrow -Y^R \not\geq -x \wedge -y \not\geq -X^L \Rightarrow (-Y)^L \not\geq -x \wedge -y \not\geq (-X^R) \Rightarrow -y \leq -x$. □

5.2 Sčítání

Jak budeme definovat sčítání? Na ostrově čísel Conway píše: Levá část vznikne přičtením čísla a všech levých možností druhého. A analogicky pro pravou část.

Definice 5.4. $x + y = \left\{(X^L + y) \cup (x + Y^L) \mid (X^R + y) \cup (x + Y^R)\right\}$.

Poznámka: Abychom se vyhnuli zápisům s mnoha závorkami, budeme také psát prvky

$$x + y = \left\{X^L + y, x + Y^L \mid X^R + y, x + Y^R\right\}.$$

Bylo by potřeba dokázat, že sčítání je binární operace. Než-li to ale uděláme, můžeme pracovat na chvíli s pseudočísly a prozkoumáme některé vlastnosti součtu.

Poznámka: Conway následující rutinní důkazy nazývá jednořádkovými.

Věta 5.5. *(0 je nulový prvek)* $x + 0 = 0 + x = x$

Důkaz: (indukcí) Podle definice je $x+0 = \left\{X^L + 0 \mid X^R + 0\right\}$ a díky indukci dostáváme, že $x + 0 = 0$. Druhá část důkazu je obdobná. □

Věta 5.6. *(komutativnost sčítání)* $x + y = y + x$

Důkaz: (indukcí)

$$
\begin{aligned}
&x + y = \\
&\quad = \left\{X^L + y, x + Y^L \mid X^R + y, x + Y^R\right\} = \left\{y + X^L, Y^L + x \mid y + X^R, Y^R + x\right\} \\
&\quad = \left\{Y^L + x, y + X^L \mid Y^R + x, y + X^R\right\} \\
&\quad = y + x.
\end{aligned}
$$

□

Věta 5.7. *(asociativnost)* $x + (y + z) = (x + y) + z$

Důkaz: (indukcí)

$$
\begin{aligned}
&x + (y + z) = \\
&= \left\{X^L + (y + z), x + (y + z)^L \mid \ldots\right\} = \left\{X^L + (y + z), x + (Y^L + z), x + (y + Z^L) \mid \ldots\right\} \\
&= \left\{(X^L + y) + z, (x + Y^L) + z, (x + y) + Z^L \mid \ldots\right\} = \left\{(x + y)^L + z, (x + y) + z^L \mid \ldots\right\} \\
&= (x + y) + z.
\end{aligned}
$$

□

Poznámka: Asociativnost říká, že nezáleží na uzávorkování, a tedy můžeme také psát $x + y + z$.

Výpočtem $1 + (-1)$ se přesvědčíme, že nedostaneme nulu, protože

$$1 + (-1) = \{0 \mid\} + \{\mid 0\} = \{0 + (-1) \mid 1 + 0\} = \{-1 \mid 1\} \neq 0.$$

Platí ale, že $\{-1 \mid 1\} \equiv 0$. Abychom zachránili vlastnost opačného prvku, nutně musíme opustit totožnost a používat ekvivalenci 'jako' $\equiv$. Následující věta nás přesvědčí o tom, že každé číslo má opačné číslo, tj.

Věta 5.8. $x + (-x) \equiv 0$

Důkaz: (indukcí) $x + (-x) \equiv 0$ znamená dokázat konjunkci $x + (-x) \leq 0 \wedge x + (-x) \geq 0$. Dokážeme první část podle axiómu 3.2. Dokázat $x+(-x) \leq 0$ znamená dokázat konjunkci $X^L + (-x) \ngeq 0 \wedge x + (-X)^L \ngeq 0$. Dokážeme první část konjunkce. $0 \nleq X^L + (-x) \Leftrightarrow 0 \geq X^{LR} + (-x) \vee 0 \geq X^L + (-x)^R = X^L + (-X^L)$. Ovšem X^L je jednodušší než x a tedy předpokládáme indukcí, že platí $X^L + (-X^L) \equiv 0$. Zbylé tři nerovnosti se dokazují obdobně. □

Vraťme se k problému, zda sčítání je binární operací, tj. zda součtem nadreálných čísel je nadreálné číslo a zkoumejme, jaké věty budeme potřebovat k důkazu.

Je třeba ověřit, že součtem nadreálných čísel je nadreálné číslo, a nezávislost na vybraných komponentách (nezáleží na výběru). K tomu bude stačit, budou-li platit tyto nerovnosti:

$$X^L + y < X^R + y,\ X^L + y < x + Y^R,\ x + Y^L < X^R + y,\ x + Y^L < x + Y^R. \qquad (3)$$

Tyto nerovnosti budou důsledkem invariance $\leq$ vůči součtu (analogicky jako pro opačný prvek, viz výše; vzniknou součtem nerovností).

Věta 5.9. *(vlastnost krácení)* $x + y \leq x + z \Rightarrow y \leq z$.

Důkaz: (indukcí) Budeme předpokládat, že vlastnost krácení platí pro všechna jednodušší čísla, než-li jsou čísla x, y, z. Potom podle definice $\leq$ můžeme rozepsat

$$x + y \leq x + z \Leftrightarrow (x + y)^L \ngeq x + z \wedge x + y \ngeq (x + z)^R,$$

tj. podle definice sčítání

$$X^L + y \ngeq x + z \wedge x + Y^L \ngeq x + z \wedge x + y \ngeq X^R + z \wedge x + y \ngeq x + Z^R.$$

Když platí (druhé a čtvrté tvrzení), potom

$$\neg(x + z \leq x + Y^L \vee x + Z^R \leq x + y)$$

a díky indukčnímu předpokladu také

$$\neg(z \leq Y^L \vee Z^R \leq y)$$

a díky definici relace $\leq$ je $z \nleq Y^L \wedge Z^R \nleq y \Leftrightarrow y \leq z$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 5.10. *(invariance $\leq$ vůči součtu)* $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

Důkaz: (sporem a indukcí) Kdyby platilo $x + z \nleq y + z$, muselo by také platit

$$(x + z)^L \geq y + z \vee x + z \geq (y + z)^R,$$

tj.

$$X^L + z \geq y + z \wedge x + Z^L \geq y + z$$

nebo

$$x + z \geq Y^R + z \wedge x + z \geq y + Z^R.$$

Ukážeme, že žádný z těchto případů nemůže nastat.

První a třetí tvrzení, použijeme-li předcházející větu, vede ke sporu s předpokladem $x \leq y$. Pro důkaz nepravdivosti zbývajících dvou tvrzení využijeme indukci. Protože předpokládáme $x \leq y$, dostaneme díky indukčnímu předpokladu $x + Z^L \leq y + Z^L$. Protože navíc předpokládáme $y + z \leq x + Z^L$, můžeme použít tranzitivnost relace $\leq$, dostaneme $y + z \leq y + Z^L$. Nakonec použijeme předcházející větu a dostaneme tvrzení

$z \leq Z^L$, které je ve sporu s reflexivností relace $\leq$. Analogicky se přivede ke sporu i poslední případ $x + z \geq y + Z^R$. $\square$

Vraťme se k důkazu nerovností (3) a na ukázku dokažme druhé tvrzení $X^L + y < x + Y^R$. Zbylá tvrzení se dokáží analogicky. Protože $X^L < x$, platí také $X^L + y < x + y$. Podobně protože $y < Y^R$, platí $x + y < x + Y^R$, a tedy díky tranzitivnosti relace $<$ také $X^L + y < x + Y^R$.

Obvyklým způsobem můžeme definovat odčítání nadreálných čísel jako přičítání opačného prvku.

Definice 5.11. (odčítání) $x - y = x + (-y)$.

Nadreálná čísla mají tvar Abelovy grupy, jsou asociativní, komutativní, 0 je nulový prvek a mají vlastnost opačných prvků. Uspořádání je lineární.

5.3 Násobení

Na první pohled se může Conwayova definice z kamenné desky zdát zmatečná, ale její smysl je ten, že součin dvou čísel xy musí být definován pomocí levých (pravých) prvků, které jsou menší (větší) než samo xy. Poznamenejme, že násobení nelze definovat $xy := \{X^L y, xY^L \mid X^R y, xY^R\}$. Formální definice násobení nadreálných čísel vypadá takto:

Definice 5.12. (násobení)

$$xy = \{X^L y + xY^L - X^L Y^L, \dots \mid X^L y + xY^R - X^L Y^R, \dots\}.$$

$$(xy)^L = X^L y + xY^L - X^L Y^L, X^R y + xY^R - X^R Y^R$$
$$(xy)^R = X^L y + xY^R - X^L Y^R, X^R y + xY^L - X^R Y^L$$

Tak jako v případě součtu, než-li přistoupíme k důkazu, že násobení je binární operací, musíme dokázat některé základní vlastnosti násobení.

Podle definice násobení je jednoduché dokázat, že pro každé číslo x je $x0 = 0$ a $0x = 0$, protože levá i pravá část množiny čísla nula je prázdná množina a cokoliv přidáme součtem (součinem) k prázdné množině dostaneme opět prázdnou množinu. Tedy platí následující věta:

Věta 5.13. *(0 je agresivní prvek) $x0 = 0$ a $0x = 0$.*

Jak očekáváme, 1 je jednotkovým prvkem.

Věta 5.14. *(jednotkový prvek) $x1 = x$ a $1x = x$.*

Důkaz: (indukcí) Pro libovolné číslo x máme

$$x1 = \{X^L 1 + x0 - X^L 0 \mid X^R 1 + x0 - x^R 0\} = \{X^L \mid X^R\} = x.$$

$\square$

Jak je vidět z důkazů, uplatňují se běžně dokázané vlastnosti jak sčítání, tak i násobení. Nyní je třeba dokázat, že násobení má i další očekávané vlastnosti, tj. je komutativní, asociativní, distributivní vzhledem ke sčítání a součin kladných (záporných) nadreálných čísel je kladné nadreálné číslo. Tyto důkazy lze nalézt v [OGAN] a my je zde vynecháme. Nicméně tyto vlastnosti se uplatní při rozboru tvrzení, že součin čísel je číslo.

Číslo leží mezi svou levou a pravou částí, a tedy například $x - X^L > 0$ a $y - Y^R < 0$. Proto $(x - X^L)(y - Y^R) < 0$ a analogicky v ostatních případech. Naši definici upravíme do tvaru

$$xy = \left\{ xy - (x - X^L)(y - Y^L), \ldots \,\middle|\, xy - (x - X^L)(y - Y^R), \ldots \right\},$$

$$\begin{aligned}(xy)^L &= xy - (x - X^L)(y - Y^L), xy - (x - X^R)(y - Y^R)\\ (xy)^R &= xy - (x - X^L)(y - Y^R), xy - (x - X^R)(y - Y^L),\end{aligned}$$

a tedy $xy > xy - (x - X^L)(y - Y^L), \ldots$ a $(x - X^L)(y - Y^L) > 0, \ldots$, což také dává další motivaci zavedení součinu.

V [OGAN] lze nalézt i další definice, například pro nadreálná čísla $1/x$, $\sqrt{x}, \ldots$ a je ukázáno, že x/y je také nadreálné číslo, $\frac{1}{x}x = 1$ a podobně. Jak podíl a převrácená čísla souvisí je podrobně rozebráno v [ONAG].

S těmito znalostmi můžeme udělat závěr, že nadreálná čísla tvoří úplně uspořádané těleso.

5.4 Den 2 a tak dále

Připomeňme, že podle věty 3.11 a (2) druhý den vznikla čísla

$$-\{1 \mid\} < -1 < -\{0 \mid 1\} < 0 < \{0 \mid 1\} < 1 < \{1 \mid\}.$$

Pomocí předcházejících definic se můžeme dostat dále. Například spočítáme $1 + 1 = \{0 \mid\} + \{0 \mid\} = \{0 + 1, 1 + 0 \mid\} = \{1 \mid\}$ a tedy $\{1 \mid\}$ musí být 2. Nechá se také očekávat, že $\{0 \mid 1\}$ bude $1/2$. K tomu bude stačit, aby $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} \equiv 1$ a $2\{0 \mid 1\} \equiv 1$. Zkusme první možnost a dostaneme $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = \{0 + \{0 \mid 1\} \mid 1 + \{0 \mid 1\}\}$, ovšem toto číslo nebylo dosud vytvořeno. Podle věty o nejstarším prvku je to také 'jako' 1. Takže druhého dne bylo vytvořeno těchto sedm čísel:

$$-2 < -1 < -1/2 < 0 < 1/2 < 1 < 2.$$

Podle věty 3.11 následující třetí den vznikne dalších osm čísel, a sice

$$\{\mid -2\}, \{-2 \mid -1\}, \{-1 \mid -1/2\}, \{-1/2 \mid 0\}, \{0 \mid 1/2\}, \{1/2 \mid 1\}, \{1 \mid 2\}, \{2 \mid\}.$$

Tak jako druhého dne, můžeme tato čísla zařadit mezi stávající čísla. Nové hodnoty můžeme získat sčítáním. Např. $1 + 2 = \{0 \mid\} + \{1 \mid\} = \{0 + 2 \mid\} = \{\mid\}$ a proto $\{2 \mid\} = 3$. Budeme-li mít $x = \{1 \mid 2\}$, potom $x + x = \{1 \mid 2\} = \{1 \mid 2\} = \{x + 1 \mid x + 2\}$. Protože x

je číslo, víme, že $x+1 < x < x+2$ a tedy $1 < x < 2$. Protože pouze jedno číslo vytvořené třetího dne je větší než 2 a $3 = 1+2 < x+2$, proto 3 je nejjednodušší číslo mezi $x+1$ a $x+2$. Odtud $x + x = 3$, a tedy $x = \{1 \mid 2\} \equiv 3/2$. Podobně najdeme i $1/4 \equiv \{0 \mid 1/2\}$, $\{1/2 \mid 1\} \equiv 3/4, \dots$ Poznamenejme, že hodnoty čísel vytvořených třetího dne vznikají jako aritmetické průměry levých a pravých částí čísel, které vznikly předcházejícího dne.

```
           -2          -1     -1/2     0       1/2     1           2
--|--------x-----|-----x---|---x---|---x---|---x---|---x-----|-----x--------|--
  -3            -3/2      -3/4    -1/4     1/4     3/4       3/2            3
```

Podobně hodnoty čísel vytvořených 4. dne je aritmetickým průměrem dvou sousedních čísel vytvořených předcházejícího dne. Obecně platí, že toto pravidlo platí i pro následující dny.

Poznámka: Určíme hodnotu čísla $f = \{3/2 \mid 2\}$ tak, že spočítáme $f + f$. Tedy $f + f = \{f + 3/2 \mid f + 2\} = \{\{3/2 \mid 2\} + 3/2 \mid \{3/2 \mid 2\} + 2\} = \{3/2 + 3/2, \{3/2 \mid 2\} + 1 \mid 4\} = \{3 \mid 4\} = 7/2$, tedy $f + f = 7/2$ a $f = 7/4$.

Věta 5.15. *Jsou-li dne n vytvořena čísla*

$$-x_m < \cdots < -x_2 < -x_1 < x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m,$$

potom nová čísla vytvořená následujícího $n+1$ dne jsou

$$\{0 \mid x_1\} < \{x_1 \mid x_2\} < \cdots < \{x_{m-1} \mid x_m\} < \{x_m \mid\}$$

a k nim opačná. Dále pro kladná čísla platí

$$\{x_m \mid\} \equiv x_m + 1$$

a

$$\{x_i \mid x_{i+1}\} \equiv \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

pro $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, a analogicky pro čísla opačná.

Důkaz: Podle věty 3.11 víme, že $(n+1)$ dne vzniknou právě tato čísla

$$\{0 \mid x_1\}, \{x_1 \mid x_2\}, \dots, \{x_{m-1} \mid x_m\}, \{x_m \mid\}$$

a k nim opačná. Dále uvažujme pouze kladná čísla, pro záporná je důkaz obdobný.

1. Uvažujme dvě čísla vedle sebe a dokážeme, že $\{x_{i-1} \mid x_i\} < \{x_i \mid x_{i+1}\}$. Sporem předpokládejme, že $y = \{x_{i-1} \mid x_i\} \geq \{x_i \mid x_{i+1}\} = z$. Protože y je číslo, platí $y < x_i$, a díky axiómu 3.2 také $x_i < y$ (spor).
2. Uvažujme dvě vedle sebe čísla na konci, tj. $x = \{x_m \mid\}$ a $y = \{x_{m-1} \mid x_m\}$. Dokážeme $x > y$. Sporem předpokládejme $x \leq y$. Podle axiómu 3.2 je $X^L \not\geq y$, tj. $x_m < y$ a protože y je číslo, platí také $y < x_m$ (spor). Tedy $\{x_m \mid\}$ je také největší celé číslo vytvořené $(n+1)$ dne.

3. (indukcí) Dokážeme, že $\{x_m \mid\} = x_m+1$. Spočítáme $x_m+1 = \left\{X_m^L + 1, x_m + 0 \;\middle|\right\} = \left\{X_m^L + 1, x_m \;\middle|\right\}$. Indukcí předpokládáme, že $x_m = \left\{X_m^L \;\middle|\right\}$ je celé číslo $X_m^L = x_m - 1$. Tedy $X_m^L + 1 = x_m + 1 - 1 = x_m$ a tedy také $x_m + 1 = \{x_m \mid\}$
4. Uvažujme nyní číslo $x = \{x_i \mid x_{i+1}\}$, které bylo vytvořeno $(n + 1)$ dne. Potom $x + x = \{x_i \mid x_{i+1}\} + \{x_i \mid x_{i+1}\} = \{x_i + x \mid x_{i+1} + x\}$. Protože x je číslo, leží mezi svou levou a pravou částí, tj $x_i < x < x_{i+1}$, $x_i+x < x+x < x_{i+1}+x$. Pokud x_i+x_{i+1} je nejjednodušší číslo mezi $x_i + x$ a $x + x_{i+1}$, potom $\{x_i + x \mid x + x_{i+1}\} \equiv x_i + x_{i+1}$. Předpokládejme, že existuje nějaké (špatné) číslo z, které je jednodušší než x_i+x_{i+1} tak, že $x_i + x < z < x + x_{i+1}$. Potom $z = x + y$, pro nějaké y, což znamená $x_i < y < x_{i+1}$. Ovšem x_i a x_{i+1} jsou sousední čísla, a tak takové y neexistuje (spor). Proto:
$$\{x_i \mid x_{i+1}\} + \{x_i \mid x_{i+1}\} = \{x_i + x \mid x_{i+1} + x\},$$
což znamená
$$\{x_i \mid x_{i+1}\} \equiv \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

□

Poznámka: V konečný den vznikají $n+1 = \{n \mid\}$, $-(n+1) = \{\mid -n\}$, zlomky $\{n \mid n + 1\} = n + 1/2$, $\left\{0 \;\middle|\; 2^{-(n-1)}\right\} = 2^{-n}$ a
$$\frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{p}{2^n} \;\middle|\; \frac{p+1}{2^n}\right\}.$$

5.5 Den ω a tak dále

Zatím jsme viděli, že každý konečný den vznikají čísla buď jako poloviny, nebo čísla na konci ($n$tého dne vzniknou celá čísla n a $-n$, viz věta 5.15). Otázkou je, jak třeba vznikne 1/3? Všechna čísla, se kterými jsme se doposud setkali byla dyadickými, tj. racionálními čísly tvaru $m/2^n$, pro $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. Jinými slovy čísla, která mají konečný dvojkový rozvoj. Číslo 1/3 má ale nekonečný periodický dvojkový rozvoj. Pokud levá (pravá) množina nadreálného čísla bude mít nekonečně mnoho čísel, dostaneme i další racionální čísla.

Pro určení nadreálného čísla 1/3 potřebujeme nekonečnou posloupnost, které se bude zleva (zprava) přibližovat k hodnotě 1/3. Vezměme například
$$x = \{1/4, 5/16, 21/64, \ldots \mid 1/2, 3/8, 11/32, \ldots\}$$
a ptejme se, zda $x = 1/3$. Bude jistě stačit výpočet $x + x + x$. Nejdříve spočítáme $x + x$. Součtem získáme
$$x+(x+x) = \left\{\frac{1}{4} + x + x, \frac{5}{16} + x + x, \frac{21}{64} + x + x, \ldots \;\middle|\; \frac{1}{2} + x + x, \frac{3}{8} + x + x, \frac{11}{32} + x + x, \ldots\right\}$$
Každé číslo levé množiny součtu $x + x + x$ je kladné číslo, je menší než 1, zatímco čísla pravé množiny jsou kladná a větší jak 1. Například $1/2 + x + x$ leží v pravé množině čísla $x + x + x$ a také platí $1/2 + x + x > 1/2 + 1/4 + 1/4$, a tedy 1/4 leží v levé množině $x + x + x$. Tedy $x + x + x \equiv 1$, což znamená $x \equiv 1/3$.

Poznámka: Víme, racionální číslo $1/3$ nemá konečný binární rozvoj, jeho vyjádření můžeme odvodit například takto:

$$1/3 = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1/4}{1-1/4} = 1/4 + 1/16 + 1/64 + \cdots .$$

Při definici čísla $1/3$ jsme postupovali tak, že do levé (dolní) množiny jsme dali čísla menší $(0, 1/4, 5/16, \ldots)$ a do pravé (horní) větší čísla, tj. $(1/2, 3/8, 11/34, \ldots)$

Podobně odvodíme i rozvoj čísla $1/5$. Ve dvojkové soustavě $1/5 = 0,001100110011\ldots$ a tedy můžeme definovat $1/5 \equiv \{0, 1/8, 3/16, \ldots \mid 1/2, 1/4, 7/32, \ldots\}$.

Poznámka: Užitečným nástrojem k hledání definic je i metoda řetězových zlomků.

Stejně můžeme postupovat i pro neperiodická čísla. Den, kdy vznikne číslo $1/3$ a zbytek reálných čísel nazýváme den ω, kde den ω je nejmenší číslo větší než všechna konečná spočetná čísla. Jiné známé číslo vytvořené dne ω je π. Binární rozvoj tohoto čísla je 11,00100100001111... a tak třeba definujeme toto číslo jako

$$\{11,001; 11,001001; 11,00100100001; \ldots \mid 11,10; 11,0011; 11,00101; \ldots\}.$$

Čísla v Π^L jsme dostali tak, že z rozvoje jsme vzali čísla končící před 1, druhou množinu jsme dostali tak, že když jsme měli 0 skončil rozvoj na napsali jsme 1.

Tak jako reálná čísla, v den omega vznikají i další zajímavá čísla. Jedno z nich je samotné $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots \mid\}$. Můžeme ukázat, že toto číslo je větší než ostatní čísla vytvořená do dne ω. Předpokládejme, že existuje nějaké $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ tak, že $x \geq \omega$. Potom podle axiómu 3.2 je pro každé $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $n < \omega$. Množina $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ale není shora omezená a tím dostáváme spor, tedy $x < \omega$ pro každé x. Poznamenejme, že i samotné omega má více tvarů, například $\omega \equiv \{\{2n\} \mid\}_{n \in \mathbb{N}}$, nebo $\omega \equiv \{\{2^n\} \mid\}_{n \in \mathbb{N}}, \ldots$ Podobně ještě vzniká mj. číslo $-\omega$, které je nejmenší záporné.

Dále například vzniká číslo $\varepsilon = \{0 \mid 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\}$ je nejmenší kladné číslo vytvořené dne ω. Nadreálné číslo $\varepsilon > 0$ díky tomu, že množina E^L obsahuje 0 a $0 \leq 0$. Nyní ještě sporem předpokládejme, že existuje nějaké reálné číslo $x = \left\{X^L \mid X^R\right\}$ takové, $x \leq \varepsilon$. Potom $x < 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ Ovšem to není možné, protože x mělo být nenulové reálné číslo. Tedy $\varepsilon < x$.

Uvažujme dále součin $\varepsilon\omega$ a ukážeme, že ε je převrácený prvek k ω.

$$\begin{aligned}\varepsilon\omega = &\ \{\varepsilon\omega - \varepsilon(\omega - \{1, 2, 4, \ldots\}) \mid \varepsilon\omega + (\{1, 1/2, 1/4, \ldots\} - \varepsilon)(\omega - \{1, 2, 4, \ldots\})\} \\ &= \{\varepsilon, 2\varepsilon, 4\varepsilon, \ldots \mid \varepsilon\omega + (\{1-\varepsilon, 1/2-\varepsilon, 1/4-\varepsilon, \ldots\})(\{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 4, \ldots\})\}\end{aligned}$$

Víme, že ε je kladné a menší než libovolné kladné reálné číslo. Levá strana $\varepsilon\omega$ je kladná, ale vždy menší než 1. Upravme pravou stranu $\varepsilon\omega$.

$$(E\Omega)^R > \varepsilon\omega + (\{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 4, \ldots\}) > \varepsilon\omega + 1,$$

kde ω je větší než libovolné konečné spočetné číslo. Tedy pravá strana $\varepsilon\omega$ je větší než 1. Podle věty o nejstarším prvku $\varepsilon\omega \equiv 1$, což znamená, že ε je inverzní k ω.

Mimo $-\varepsilon$ (věta 5.15) vznikne i číslo $\left\{1 \mid 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{16}, \ldots\right\}$, které je jen o trošku větší než číslo 1, tj. $1+\varepsilon$, atd. a tedy nadreálná čísla zaplňují prázdná místa mezi reálnými čísly. Analogií z geometrického světa je, zda prostor je affinní, či projektivní.

Následujícího dne $\omega+1$ dostaneme podle věty o nejstarším prvku a věty 5.15 také číslo $\varepsilon/2 = \{0 \mid \varepsilon\}$, které leží mezi 0 a ε a následující den podle stejné věty 5.15 (str. 18) také $\varepsilon/4 = \{0 \mid \varepsilon/2\}$, které je kladné a menší než $\varepsilon/2$, atd. a tak dál.

Mimo malá nadreálná čísla vznikají tradiční nekonečně velká čísla (věta 5.15). Podrobněji se budeme problematice věnovat v Dodatku. Zde pouze naznačíme větší a větší objekty. Například dne $\omega+1$ můžeme vytvořit číslo $\{\omega \mid\}$, které bude právě $\omega+1$, protože $\omega+1 = \{2, 3, 4, \ldots, \omega \mid\} \equiv \{\omega \mid\}$. Následující den $\omega+2$ dostaneme $\omega+2 = \{3, 4, 5, \ldots, \omega+1 \mid\} \equiv \{\omega+1 \mid\}$, dne $\omega+3$ dostaneme $\omega+3 \equiv \{\omega+2 \mid\}$, atd. Zatímco $\omega+n$ je vytvořeno $(\omega+n)$tý den (pro každé dokonce celé číslo n), ve dne 2ω můžeme také dostat číslo $\{\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots \mid\}$. Protože $\omega+\omega = \{\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots \mid\}$, musí být toto číslo rovno 2ω. Podobně $3\omega = \{2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, \ldots \mid\}$ vznikne ve dne 3ω, atd. V tomto výčtu můžeme pokračovat, vytvoříme $\omega^2 = \{\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots \mid\}$, $\omega^\omega = \{\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots \mid\}$, ...

Mimo stále větší a větší čísla současně zaplňujeme i nekonečná nadreálná čísla mezi nekonečnými nadreálnými čísly. Například dne $\omega+2$ dostaneme také číslo $\omega+\frac{1}{2} = \left\{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \ldots, \omega \mid \omega+1\right\} \equiv \{\omega \mid \omega+1\}$, které leží mezi ω a $\omega+1$.

Co očekáváme, odečteme-li 1 od ω? Jistě dostaneme $\omega-1 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega\}$. Toto nadreálné číslo je stvořeno dne $\omega+1$. Číslo $\omega-1$ je menší než ω, ale větší než libovolné přirozené číslo. Podobně následující den vznikne i $\omega-2 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega-1\}$, které je také větší než libovolné přirozené číslo a menší než ω. Dne $\omega+3$ vznikne $\omega-3 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega-1, \omega-2\}$ a tak dále. Vznikne také nadreálné číslo $\omega/2 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega-1, \omega-2, \ldots\}$, $\omega/4$, atd.

Poznámka: Označme $p = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega-1, \omega-2, \ldots\}$. Pokud spočítáme $p+p$, dostaneme $p+p = \{p, p+1, p+2, \ldots \mid p+\omega, p+\omega-1, p+\omega-2, \ldots\}$. Číslo ω leží mezi pravou a levou částí $p+p$, protože pro každé přirozené číslo n je $p+n > \omega-n+n = \omega$ a $p+\omega-n > p+\omega > \omega$. Navíc podle definice, p je nekonečné (větší než konečné přirozené číslo, levá množina obsahuje všechna přirozená čísla). Protože ω je nejjednodušší číslo větší než přirozená čísla, nutně $p+p \equiv \omega$, a tedy p je $\omega/2$.

5.6 Indukce po dnech a tak dále

Budeme-li se bavit o indukci, není problém do dne ω. Do tohoto dne můžeme používat obvyklou matematickou indukci po konečných dnech a dostaneme tak vždy spočetné množství nadreálných čísel (schéma dokazovaní pro každé n platí $\varphi(n)$ tak, že platí $\varphi(0)$ a implikace $\varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1)$ pro každé m).

Naše universum tvoří (kumulativní) hiearchii do sebe vnořených množin a všechna čísla (objekty) jsou vytvořeny pomocí prázdné množiny (resp. pomocí nuly) po dnech. Celá myšlenka indukce je založena na konečném sestupném řetězci (infinite descente). Tak byly třeba konstruovány některé důkazy: Předpoklad, že nějaké tvrzení (ne)platí pro nějaké nejjednodušší číslo, vedlo ke sporu tak, že se nalezlo menší (dříve narozené) nebo nula, které (ne)mělo stejné vlastnosti. V indukčním procesu jsme používali tuto proceduru: Jestliže věta selže pro některé číslo x, pak musí také selhat pro nějaké dříve vytvořené (jednodušší) X^L nebo X^R. Indukci, tak jak jsme ji používali, je strukturální indukce po dnech. Protože proces stvoření čísel nekončí před dnem ω musíme zkontrolovat, že naše důkazy jsou v pořádku i pro všechny následující dny.

Jestliže věta selže pro některé číslo x, pak musí také selhat pro nějaké dříve vytvořené (jednodušší) X^L nebo X^R. Jestliže selže pro X^L, potom také selže buď pro X^{LL} nebo X^{LR},..., řekněme, že selže tedy třeba pro nějaké $X^{LLLL\dots}$. Ale každá taková posloupnost je konečná a tedy $X^{LLLL\dots L}$ je prázdná a dostaneme požadovaný spor.

5.7 Podstruktury nadreálných čísel $\mathbb{N}$o

5.7.1 Zobecnělá přirozená, celá a racionální čísla

Definice 5.16. Nadreálné číslo x budeme nazývat *nadreálným zobecnělým celým číslem*, nebo jen stručně *zobecnělým celým číslem*, právě tehdy a jen tehdy, když

$$x \equiv \{x - 1 \mid x + 1\}.$$

Příklad: Nula 0 je zobecnělé celé číslo, protože 0 je nejstarším prvkem mezi -1 a 1, $-1 < 0 < 1$, a $0 \equiv \{-1 \mid 1\} = \{0 - 1 \mid 0 + 1\}$ (senior princip). Také $1 \equiv \{0 \mid 2\}$ a třeba $-2 \equiv \{-3 \mid -1\}$ jsou nadreálná zobecnělá celá čísla.
Příklad: Naopak například číslo $\frac{1}{2}$, ani $-\frac{1}{4}$ nejsou zobecnělá celá čísla. Protože $\left\{\frac{1}{2} - 1 \mid \frac{1}{2} + 1\right\} \equiv \left\{-\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\right\} \equiv \left\{-\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\right\} \equiv 0$, a tedy $\frac{1}{2} \not\equiv \left\{\frac{1}{2} - 1 \mid \frac{1}{2} + 1\right\}$, podobně $-\frac{1}{4} \not\equiv \left\{-\frac{1}{4} - 1 \mid -\frac{1}{4} + 1\right\} \equiv 0$. Nejdříve jsou vždy vytvořena celá čísla a teprve potom poloviny.

Další čísla můžeme dostat i takto: Předpokládejme, že x, y jsou zobecnělými celými čísly, potom $x \equiv \{x - 1 \mid x + 1\}$ a $y \equiv \{y - 1 \mid y + 1\}$ a

$$x + y \equiv \{x - 1 + y, y - 1 + x \mid x + 1 + y, y + 1 + x\} \equiv \{x + y - 1 \mid x + y + 1\}$$

je také zobecnělé celé číslo, navíc operace $+$ je nad nadreálnými zobecnělými čísly je uzavřená. Ke každému zobecnělému číslu i opačné je zobecnělé celé číslo, nebo-li také:

$$x - y \equiv \{x - 1 - y, -y - 1 + x \mid x + 1 - y, -y + 1 + x\} \equiv \{x - y - 1 \mid x - y + 1\}.$$

Násobení je také uzavřenou operací, tj.

$$xy \equiv \{(x-1)y + x(y-1) - (x-1)(y-1), \dots \mid (x-1)y + x(y+1) - (x-1)(y+1), \dots\} \equiv \{xy - 1 \mid$$

Zobecnělá celá čísla jsou podoborem integrity tělesa nadreálných čísel, stejně jako (nezobecnělá) celá čísla jsou podoborem integrity nadreálných čísel.

Každé celé číslo je zobecnělým celým číslem. Uvažujme nejdříve $n > 0$, potom $n - 1$ bylo vytvořeno (podle věty 5.15) $(n - 1)$ dne a následujícího dne bylo vytvořeno největší číslo n. Dne $n + 1$ byla vytvořena další dvě čísla větší než $n - 1$, a to n a $n + 1$, a aritmetický průměr $\frac{(n-1)+(n+1)}{2}$ je nejjednodušší číslo mezi $n - 1$ a $n + 1$, a tedy $n \equiv \{n - 1 \mid n + 1\}$. Pro záporná čísla je důkaz analogický.

Z druhé strany uvažujme vlastní $\frac{a}{b}$ v základním tvaru, a, b jsou (nezobecnělá) nesoudělná celá čísla, $b > 0$. Podle věty 5.15 víme, jak jsou čísla vytvářena. Bylo-li $\frac{a}{b}$ vytvořeno $n$tého dne, nejstarší mezi čísly $\frac{a}{b} - 1$ a $\frac{a}{b} + 1$ je právě n (ordinální číslo) a tedy $\frac{a}{b}$ není zobecnělým celým číslem.

Zobecnělá celá čísla obsahují i některá nekonečná čísla, například mezi $\omega - 1 \equiv \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega\}$ a $\omega + 1 \equiv \{0, 1, 2, \ldots, \omega \mid\}$ je nejstarším číslem ω. Podobně i $\omega + n$ a $\omega - n$ jsou zobecnělá celá čísla, stačí si uvědomit, kdy byla čísla vytvořena.

Dne 2ω vznikne i $\frac{\omega}{2} \equiv \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \ldots\}$. Hodnota $\frac{\omega}{2} - 1 \equiv \left\{0, 1, 2, \ldots \,\middle|\, \frac{\omega}{2}\right\}$, $\frac{\omega}{2} + 1 \equiv \left\{\frac{\omega}{2} \,\middle|\, \omega + 1, \omega, \omega - 1, \ldots\right\}$. Tato čísla vznikla dne $2\omega + 1$ a nejstarším číslem je právě $\frac{\omega}{2}$, a tedy $\frac{\omega}{2} \equiv \left\{\frac{\omega}{2} - 1 \,\middle|\, \frac{\omega}{2} + 1\right\}$. Zlomky s ω jsou tedy zobecnělými celými čísly.

Omezíme-li se na konečná zobecnělá čísla, dostaneme (nezobecnělá) celá čísla. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že zobecnělé celé číslo $|x| < n$, a potom x je celým číslem.

Omezíme-li se pouze na nezáporná zobecnělá celá čísla dostaneme tzv. *zobecnělá přirozená čísla.*

Definice 5.17. Nadreálné číslo x je *zobecnělým přirozeným číslem* právě a jen tehdy, je-li $x \geq 0$ a $x \equiv \{x - 1 \mid x + 1\}$.

Obvyklými konstrukcemi vnoření pologrupy do grupy dostaneme zobecnělá celá a zobecnělá racionální čísla[7].

5.7.2 *Reálná čísla

Definice 5.18. Nadreálné číslo x nazýváme **reálným číslem* právě tehdy a jen tehdy, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|x| < n$ a

$$x \equiv \left\{x - 1, x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{4}, \ldots \,\middle|\, x + 1, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Číslo x je omezeno a tedy jistě ω není *reálné číslo. Ze stejného důvodu ani ε nemůže být *reálné číslo. Protože $-1 < \varepsilon < 1$ je také

$$x \equiv \left\{\varepsilon - 1, \varepsilon - \frac{1}{2}, \varepsilon - \frac{1}{4}, \ldots \,\middle|\, \varepsilon + 1, \varepsilon + \frac{1}{2}, \varepsilon + \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

Protože ε obsahuje vlevo nulu a tedy $\varepsilon > 0$, a také pravá strana je kladná, ε je menší než libovolné kladné dyadické číslo. Tedy

$$\left\{\varepsilon - 1, \varepsilon - \frac{1}{2}, \varepsilon - \frac{1}{4}, \ldots \,\middle|\, \varepsilon + 1, \varepsilon + \frac{1}{2}, \varepsilon + \frac{1}{4}, \ldots\right\} \equiv 0,$$

což znamená, že ε není nadreálné *reálné číslo.

[7] viz úloha 58, [OGAN]

Předpokládejme, že x, y jsou *reálná čísla, potom

$$x + y \equiv \left\{ x + y - 1, x + y - \frac{1}{2}, x + y - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; x + y + 1, x + y + \frac{1}{2}, x + y + \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

$$-x \equiv \left\{ -x - 1, -x - \frac{1}{2}, -x - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; -x + 1, -x + \frac{1}{2}, -x + \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

$$xy \equiv \left\{ xy - 1, xy - \frac{1}{2}, xy - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; xy + 1, xy + \frac{1}{2}, xy + \frac{1}{4}, \ldots \right\},$$

což znamená, že *reálná čísla jsou podoborem integrity nadreálných čísel. I další *reálná čísla můžeme získávat pomocí řad[8]. Například pro $|x| < 1$

$$1 - \frac{1}{1-x} \equiv \left\{ x, x - x^2 + x^3, x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5, \ldots \;\middle|\; x - x^2, x - x^2 + x^3 - x^4, \ldots \right\}.$$

Uvažujme dále zobrazení f množiny $\mathbb{R}$ do množiny *reálných nadreálných čísel tak, že

$$f(x) \equiv \left\{ x - 1, x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; x + 1, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{4}, \ldots \right\}.$$

Ukážeme, že zobrazení f je izomorfismus, tzn. podle věty o vnoření, *reálná čísla jsou obvyklými reálnými čísly.

Důkaz: 1) Nejdříve přepočteme

$$f(x+y) \equiv \left\{ x + y - 1, x + y - \frac{1}{2}, x + y - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; x + y + 1, x + y + \frac{1}{2}, x + y + \frac{1}{4}, \ldots \right\} \equiv f(x) + f(y),$$

$$f(xy) \equiv \left\{ xy - 1, xy - \frac{1}{2}, xy - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; xy + 1, xy + \frac{1}{2}, xy + \frac{1}{4}, \ldots \right\} \equiv f(x)f(y).$$

2) Ukážeme, že f je bijektivní zobrazení. Budeme předpokládat, že pro dvě reálná čísla x, y je $f(x) \equiv f(y)$. Potom budeme chtít dokázat

$$\left\{ X^L \mid X^R \right\} \equiv \left\{ x - 1, x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; x + 1, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{4}, \ldots \right\} \equiv \left\{ y - 1, y - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{4}, \ldots \;\middle|\; y + 1, y$$

vezměme $x^L \in X^L$, potom $x^L < x - \frac{1}{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Proto

$$x^L + \frac{1}{2^n} < x - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$$

a $x^L + \frac{1}{2^n} \in X^L$, což znamená, že X^L neobsahuje největší prvek. Podobně ani Y^L neobsahuje největší prvek.

Pokud $x^R \in X^R$, potom $x^R > x + \frac{1}{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy

$$x^R - \frac{1}{2^n} > x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} > x.$$

[8]Stejným postupen získáme třeba $\sin \omega \equiv 0$.

Protože $x^R - \frac{1}{2^n} \in X^R$ a X^R nemá nejmenší prvek. Podobně ani Y^R nemá nejmenší prvek.
$x \equiv \left\{x-1, x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{4}, \dots \;\middle|\; x+1, x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{4}, \dots\right\}$,
$y \equiv \left\{y-1, y-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{4}, \dots \;\middle|\; y+1, y+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{4}, \dots\right\}$, je také $x \equiv y$, takže f je injektivní zobrazení.

3) Je vidět, že zobrazení je také surjektivní. Každé *reálné číslo je tvaru

$$\left\{x-1, x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{4}, \dots \;\middle|\; x+1, x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{4}, \dots\right\},$$

což je obraz x v zobrazení f. □

Tedy zobrazení f je izomorfní zobrazení okruhu reálných čísel do podokruhu *reálných čísel nadreálných čísel (a naopak). Odtud podle věty o vnoření není důvod rozlišovat čísla s hvězdičkou a bez. Současně jsme ukázali, že nadreálná čísla obsahují reálná čísla.

5.7.3 Dedekindovy řezy racionálních čísel

Definice 5.19. *Dedekindův řez racionálních čísel* je dvojice $(X;Y)$ neprázdných podmnožin racionálních čísel takových, že platí

1. Dvojice X a Y tvoří rozklad racionálních čísel, tj, $X \cup Y = \mathbb{Q}$ a $X \cap Y = \varnothing$.
2. $X < Y$, tj. $(\forall x \in X, y \in Y)\ x < y$.
3. X nemá největší prvek.

Definice inspirovaná Dedekindovými řezy je pak (rekurzivní):

1. **Nadreálné číslo je dvojice* $(X_L; X_R)$, kde
   (a) X_L, X_R jsou množinami *nadreálných čísel.
   (b) $X_L < X_R$, tj. $(\forall x_L \in X_L, x_R \in X_R)\ x_L < x_R$.
2. Pro dvě *nadreálná čísla $x = (X_L; X_R)$, $y = (Y_L; Y_R)$ $y < x \Leftrightarrow \neg(x \le y)$, tj. $x \not\le y$.
3. $x \le y$ právě tehdy a jen tehdy, když současně
   (a) $x < Y_R$, tj. $(\forall y_R \in Y_R)\ x < y_R$,
   (b) $x_L < y$, tj. $(\forall x_L \in X_L)\ x_L < y$.

Příklad: $0 = (\varnothing; \varnothing)$ je *nadreálné číslo díky obecným kvantifikátorům a vlastnostem prázdné množiny. $1 = (\{0\}; \varnothing)$ je *nadreálné číslo, protože $\{0\} < \varnothing$, $-1 = (\varnothing; \{0\})$, je *nadreálné, protože také $\varnothing < \{0\}$. Ale například $(\{0\}; \{0\})$ není *nadreálné číslo, protože není pravda $0 < 0$. Zobrazení $f(\{X^L \mid X^R\}) = (X_L; X_R)$ je izomorfismus.

5.8 Bílo–černý Nim

Budeme hrát hru s černými a bílými kameny. Jeden hráč bude odebírat kameny černé a druhý zbývající hráč bílé kameny. Kameny budou v řadách, například jedna řada může vypadat takto:

|○●●○●●●○

a podobně. Hráč na tahu si vybere kámen své barvy, odebere ho a s ním ještě všechny kameny napravo od něj (i kameny protihráče). Hráči se dohodnou před začátkem hry, který bude začínat. Hráči se v tazích střídají. Hra skončí v pozici, kdy hráč nemůže táhnout (v žádné řadě již nejsou kameny jeho barvy). Tento hráč ve hře prohrál, protože nemůže táhnout. Druhý hráč vyhrál.

Zahrajte si hru na třech řadách [|●●○○●●○○● / |○○○● / |●○○○○].

Bude-li začínat černý (odebírá černé kameny ●) může odebrat třeba 4. kámen z první řady a hra se posune do postavení: [|●●○○● / |○○○● / |●○○○○].

Oba hráči hrají optimálně a snaží se vyhrát. Hráč svým tahem v jedné řadě neovlivní kameny v jiných řadách. Předcházející hru také můžeme zapsat jako disjunktní součet |●●○○● + |○○○● + |●○○○○.

Pokud hra obsahuje v každém řádku pouze jednobarevné kameny, je hra jednoduchá. Například ve hře |○ vyhraje bílý hráč. Dokonce můžeme říct, že hráč má jeden tah navíc. Hodnotu takové hry označíme 1. Podobně ve hře |○○ má výhodu dvou tahů a její hodnotu označíme 2. Opačně třeba ve hře |●●● má naopak výhodu tří tahů černý hráč a její hodnotu označíme -3, atd. Například výhodný tah pro levého hráče ve hře |○○○ je odebrání posledního kamene. Budeme-li hrát na více řádcích, strategie bude jednoduchá, stačí spočítat černé a bílé kameny, a součet ukáže výsledek hry. Například ve hře [|○○○ / |●●●● / |○○ / |●●●] má výhodu černý hráč a její hodnota je -2 (dva tahy navíc). Samozřejmě, že všechny tahy nejsou optimální a hráči se budou snažit snižovat počty kamenů v řádcích od konce. Předcházející příklad nás přivede k výpočtu $3-4+2-3=-2$. Jaký výsledek bude ve hře [|○○○ / |●●●● / |○○ / |●●●] + |○○? Zahrajte si hru [|○○○ / |●●●● / |○○ / |●●● / |○○]. Pokud hodnota hry je nula, první hráč prohrává (a druhý hráč je vítězem). Ve hře [|○ / |●] existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče a její hodnota je nulová.

Dohodneme se na tom, že hry, kde existuje vyhrávající strategie pro bílého hráče bude kladná a naopak. Hodnotou budeme rozumět o kolik má bílý má výhodu. Jak je to ale s hrou |○●? Začne-li černý, bude mít bílý výhodu jednoho tahu a černý prohraje. Začne-li naopak bílý, odebere svůj kámen a černý a nedovolí černému hráči hrát! V každém případě je hra tedy kladná (vyhraje bílý) a nejvyšší výhodu má bílý hráč o jeden tah. Hodnota hry tedy bude někde mezi 0 a jedničkou. Dohodněme se, že hodnotu této hry |○● budeme označovat $1/2$ a nazývat ji půl. Skutečně půl plus půl je jedna, protože $1/2+1/2-1$ je nula (vyhraje druhý). Zahrajte si hru [|○● / |○● / |●]! Hra |○● je menší než jedna, protože ve hře [|○● / |●] má převahu černý hráč (začíná-li, prvním tahem zahraje v prvním řádku.), tj. hodnota $1/2-1$ je záporná.

Rozeberme si hru |○●○. V této hře vyhraje jistě bílý hráč (hra začíná bílým kamenem) a hra je kladná. Začne-li bílý hráč, raději bude odebírat svůj poslední kámen a hodnota hry bude $1/2$. Začne-li naopak černý hráč, může zahrát pouze do hry |○, která má hodnotu 1. Hodnota hry |○●○ je ale menší než jedna, protože například ve hře |○●○ + |● má převahu černý hráč! Dohodneme se, že hodnotu hry |○●○ označíme jednoduše $3/4$, a nějakým výpočtem prokážeme oprávněnost. Například $3/4+3/4-1-1/2=0$ a tedy ve hře [|○●○ / |○●○] + |● + |●○ existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče (hra je nulová).

Opačné prvky jistě znamenají změnu barev kamenů.

Budeme-li v našich výpočtech pokračovat, získáme například hodnoty her þ●● $= 1/4$, nebo |●○○● $= -3/8$, atd.

Pravidlo získávání hodnot her je vcelku jednoduché. Začíná-li hra bílým kamenem, označíme ho $+1$, naopak -1. Dále budeme předpokládat bez újmy na obecnost, že řádek začíná bílým kamen (pro černý kámen je situace opačná). Nasčítáme hodnoty bílých kamenů od začátku bez přeskoku nějakého černého kamene (dostaneme celé kladné číslo). Bude-li následovat černý kámen, připočteme -2^{-n}, v opačném případě připočteme 2^{-n}. Například náš první příklad þ●●○●●●○ má hodnotu $+1-1/2-1/4+1/8-1/16-1/32-1/64+1/128$. Má-li hra více řádků, sečteme hodnoty všech řádků. Pokud výsledná hodnota je kladná vyhraje bílý hráč, v opačném případě černý. Je-li hodnota nulová, první hráč nemůže zahrát dobře (bez chyb druhého) a nemůže si zajistit vítězství. Pro nulovou hodnotu existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče.

Jak tedy budeme hrát? Z předcházejících pravidel je vidět, že nejlepším tahem je odebírat nejpravější kámen své barvy z nejdelšího řádku, protože odebráním tohoto kamene snížíme hodnotu hry vždy nejméně. Všechna pravidla lze jednoduše dokázat indukcí.

Budeme-li pracovat pouze s konečnými řadami, budeme dostávat pouze dyadická celá čísla (analogie desetinných čísel se základem 2) tvaru $p/2^q$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Co se stane, budeme-li předpokládat, že naše řady mohou být také nekonečné? Dostaneme například periodická čísla (racionální) a neperiodická čísla (iracionální). Například hra þ●●○●○●○●○●○●○··· má hodnotu 1/3, nebo hra þ○○○●●●○●●○●●●●○○○··· má hodnotu π.

Opakující se část budeme značit čárkou nad (perioda). Například þ●●○●○●○●○●○●○··· $=$ þ●$\overline{\bullet\circ}$. Z typografického hlediska je možné použít také například závorky, závorky s naznačenou mocninou, nebo jen mocninu. Například þ●○ má hodnotu 3/4, a odpovídá hře þ$^\omega$●$^\omega$○$^\omega$, její hodnota je $\frac{3}{4}\omega$. Hru $\frac{3}{4}\omega$ můžeme také označovat (þ)$^\omega$(●)$^\omega$(○)$^\omega$ nebo jen (þ)(●)(○).

Při další analýze využijeme mj. tyto tyto hodnoty: hodnota hry þ●●○●○ je $1-1/2-1/4+1/8-1/16+1/32 = 11/32 = 1/3+1/96$, a hodnota hry þ●●○● je $1-1/2-1/4+1/8-1/16 = 11/32 = 1/3-1/48$.

Jak se asi bude hrát hra

þ●●○●○●○●○●○●○●○··· + þ●●○●○●○●○●○●○●○··· + þ●●○●○●○●○●○●○●○··· + |●?

Analýza hry nás přivede na konstatování, že 1) existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče, 2) hra je nulová 3) přirozený 3. násobek 1/3 je přesně 1.

Nyní můžeme zkontrolovat, že hodnota hry þ●$\overline{\bullet\circ}$ je 1/3. Jak se bude hrát ve hře

þ●$\overline{\bullet\circ}$ + þ●$\overline{\bullet\circ}$ + þ●$\overline{\bullet\circ}$ $- 1$?

Hrát do hry -1 se žádnému hráči nechce. (Proč?) Začne-li černý hráč, vybere si nějakou nekonečnou část a udělá z ní konečný řetězec. Například:

þ●●○●○ + þ●$\overline{\bullet\circ}$ + þ●$\overline{\bullet\circ}$ $- 1$.

Bílý hráč je ve výhodě, protože může táhnout do lepšího postavení ve druhé hře takto:

$$\text{þ}\bullet\bullet\circ\bullet\circ + \text{þ}\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet + \text{þ}\bullet\overline{\bullet\circ} - 1.$$

Zatímco hodnota prvního členu je $1/3+1/96$, druhý člen má hodnotu $1/3-1/192$ a tedy hra je lepší pro bílého hráče. Výsledná hodnota hry $1/3+1/96+1/3-1/192+1/3-1$ je tedy kladná.

Co je tedy lepší hra? Hry jsou stejné pouze mají-li stejnou délku (počet kamenů) a posloupnost černých a bílých kamenů je stejná. Dvě hry x a y mohou mít společnou začínající část (tzv. úsek) a byly by stejné. Lepší hru rozhodne bezprostředně následující kámen. Bude-li x pokračovat bílým kamenem $\circ$ a posloupnost y nebude pokračovat, nebo pokračovat černým kamenem, potom hra x je lepší jak y, nebo x nepokračuje, ale y pokračuje černým kamenem $\bullet$. Jinak hra x je horší. Jistě platí $\bullet < 0 < \circ$; $\circ\bullet\circ\circ\bullet < \circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ, \ldots$ Všechna celá a dyadická čísla mají konečnou délku. Ostatní reálná čísla mají délku ω.

Nechť dále x je ČBNim. Potom označme $X^L = \{a; a \text{ je horší úsek } x\}$ a $X^R = \{b; b \text{ je lepší úsek } x\}$. *Kanonickým tvarem* nazveme dvojici $X^L|X^R$.

Příklad: Hra $\text{þ}\circ\bullet\bullet\circ = 11/8 = \{0, 1, 5/4\}|\{2, 3/2\}$. Conway by hře přiřadil hodnotu takto: $\text{þ}\circ\bullet\bullet\circ = \left\{0, 1, 1\frac{1}{4} \,\middle|\, 2, 1\frac{1}{2}\right\} = 1\frac{3}{8}$,

Na kanonickém tvaru ČBNimu můžeme obvyklým způsobem definovat sčítání a násobení a dostaneme těleso.[9]

Příklad: Označme ${}^*\varepsilon = \text{þ}\overline{\bullet} = \{0\}|\{1, 1/2, 1/4, \ldots\}$ a ${}^*\omega = \overline{\text{þ}} = \{0, 1, 2, \ldots\}|\varnothing$. Najděte součet a součin.

Mohlo by se zdát, že naše skládání kamínků a odebírání kamínků je pouhá hra bez výsledků. Není tomu tak, a ukážeme jeden rozdíl. Narozdíl od standardní matematiky čísel, čísla nejsou odvozena od počtu, respektive měření. Další rozdíl se najde v desetinných čísel, který je mnohem důležitější. Ve standardní matematice se periodická čísla definují pomocí limitního procesu, například periodické nekonečné desetinné číslo $0,333\ldots = 0,\overline{3}$ chápeme jako posloupnost $0,\underbrace{333...3}_{n\times}$ pro n ubíhající do nekonečna. V tuto chvíli ale není nutné zavádět v oblasti manipulace s kameny jakýkoliv limitní přechod, protože po každém prvním tahu bude posloupnost kamenů v naší hře již konečná! A hra může pokračovat obvyklým způsobem…

Označení periodických ČBNimu nám umožní efektivněji pracovat s nekonečnými hrami. Například hra $\overline{\text{þ}}$ je lepší než jakákoliv neperiodická hra. Pokud zahraje bílý hráč v této hře, první hra je delší. Hra $\overline{\text{þ}}$ hraje roli nekonečna. Zatímco hra $\text{þ}\overline{\circ}$ je s hrou $\overline{\text{þ}}$ ekvivalentní, hra $\overline{\text{þ}}\circ$ má význam nekonečno plus jedna, protože $\overline{\text{þ}}\circ + \text{þ}\bullet + \text{þ}\overline{\bullet}$ má vyhrávající strategii pro druhého hráče.

Podobně hra $\overline{\text{þ}}\circ\bullet$ je hra nekonečno plus půl, apod. Hra $\overline{\overline{\text{þ}}}$ je nekonečno krát nekonečno, ale můžeme získávat i komplikovanější hry, například $\overline{\text{þ}\overline{\circ\bullet}}$.

[9]Podrobnosti jsou obsahem publikace Harry Gonshor: *An introduction to the theory of Surreal Numbers*

Viděli jsme, že v našich výpočtech získáváme nekonečně malé a nekonečně velké veličiny. Přeci jen je tu ještě jeden rozdíl. Soustředíme se na hru $|\circ\bullet\overline{\circ}$. Její hodnota je $1 - 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ a porovnáme tuto hodnotu s 1. Je vidět, že tato hodnota hry není rovna 1. Napíšeme-li tuto hru jinak, tj. $|\circ + |\bullet\overline{\circ}$, je její hodnota $1 - \varepsilon$. V „běžné“ matematice ale hodnota $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots = 1$, což je způsobeno limitním procesem, který je závislý na tzv. Archimédovu axiómu, kterému vyhovují reálná čísla, a který nepřipouští existenci nekonečně malých veličin. Rovnost $0,\overline{9} = 1$ je závislá na uspořádání! A tedy $0,\overline{9}$ je o trošku (tj. o epsilon) menší jak 1. Je jistě zajímavé, že $3 \cdot 0,\overline{3}$ je přesně 1 a ne $0,\overline{9}$ jak by bylo možné také očekávat.

Doporučená literatura

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[CGT] *Úvod do teorie kombinatorických her*, `http://cgt.ic.cz/hs` (červenec 2011)

[2hs03RMF actual Knuth2.tex, 01/09/13, 10:36]