ale nesmí se protínat s jiným výhonkem, ani sama se sebou a také nesmí procházet některým z dříve nakreslených bodů. B) Z každého bodu (sazenice) smějí vycházet maximálně tři výhonky (křivky). Hráč, který nemá tah, prohrál. Ověřte, zda platí:

(i) Hra s n-uzly skončí nejpozději po $3n-1$ tazích.
(ii) Na dvou uzlech existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče při normální i betlové variantě hry.
(iii) Na třech uzlech existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče (Zjistěte, zda dobrým tahem prvního hráče je opsání křivky okolo jednoho základního uzlu.), v betlové variantě existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče.
(iv) Zjistěte, zda hra SAZENICE na n bodech (jamkách) skončí nejméně po $2n$ tazích. Věnujte pozornost těm hrám, které skončí právě po $2n$ tazích.
(v) Hrajte SAZENICE na sedmi jamkách, strategie je dodnes neznámá.

ÚLOHA 153. Zde je místo pro vaši vlastní úlohu:

Přehled základních definic

DEFINICE (HRA). Nechť L, R jsou dvě libovolné množiny her. Potom uspořádaná dvojice $(L; R)$ je hra. Všechny hry jsou vytvořeny tímto způsobem.

ÚMLUVA. Symbolem x^L, resp. x^R označujeme libovolnou levou, resp. pravou subhru (možnost, prvek, alternativu, tah, jednodušší hru, hru dříve vytvořenou, ...) hry $x \equiv (L; R)$.
Hru x zapisujeme ve tvaru $x \equiv \{\, x^L \mid x^R \,\}$.

PŘÍKLAD.
$0 \equiv \{\mid\}$, $1 \equiv \{\, 0 \mid \}$, $2 \equiv \{\, 1 \mid \}$, $* \equiv \{\, 0 \mid 0 \,\}$, $\uparrow \equiv \{\, 0 \mid * \,\}$,
$\frac{1}{2} \equiv \{\, 0 \mid 1 \,\}$.

DEFINICE. Nechť x, y jsou hry.

$$\begin{aligned}
x+y &\overset{\text{def}}{\equiv} \{\, x^L+y,\ x+y^L \mid x^R+y,\ x+y^R \,\}\\
-x &\overset{\text{def}}{\equiv} \{\, -x^R \mid -x^L \,\}\\
x \le y &\overset{\text{def}}{\iff} x^L \not\ge y \ \wedge\ x \not\ge y^R\\
x \ge y &\overset{\text{def}}{\iff} y \le x\\
x = y &\overset{\text{def}}{\iff} x \le y \ \wedge\ y \le x\\
x < y &\overset{\text{def}}{\iff} x \le y \ \wedge\ y \not\le x\\
x \parallel y &\overset{\text{def}}{\iff} x \not\le y \ \wedge\ y \not\le x.
\end{aligned}$$

DEFINICE. Hru $x \equiv \{\, x^L \mid x^R \,\}$ nazýváme Conwayovým číslem právě tehdy, když L, R jsou libovolné množiny čísel a platí-li $x^L \not\ge x^R$.

DEFINICE. Nechť $x \equiv \{\, x^L \mid x^R \,\}$, $y \equiv \{\, y^L \mid y^R \,\}$ jsou čísla.

$$\begin{aligned}
xy \overset{\text{def}}{\equiv} \{\, & x^Ly+xy^L-x^Ly^L, x^Ry+xy^R-x^Ry^R \mid \\
&\mid x^Ly+xy^R-x^Ly^R, x^Ry+xy^L-x^Ry^L \,\}.
\end{aligned}$$

DEFINICE. Nechť $x \equiv \{\, x^L \mid x^R \,\}$ je kladné číslo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \equiv y \overset{\text{def}}{\iff} y = \Big\{\, & 0, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R} \;\Big| \\
&\Big|\; \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R} \,\Big\}.
\end{aligned}$$

DEFINICE. Nechť $x \equiv \{\, x^L \mid x^R \,\}$ je nezáporné číslo.

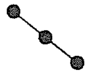
$$\sqrt{x} \equiv y \overset{\text{def}}{\iff} y = \Big\{\, \sqrt{x^L}, \frac{x+y^Ly^R}{y^L+y^R} \;\Big|\; \sqrt{x^R}, \frac{x+y^Ly^{L\bullet}}{y^L+y^{L\bullet}}, \frac{x+y^Ry^{R\bullet}}{y^R+y^{R\bullet}} \,\Big\}.$$

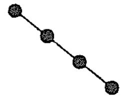
Symboly a označení

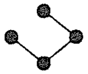
Hra:

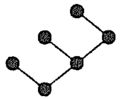
0 $\{\ |\ \} = \bullet 0 = \bullet$.

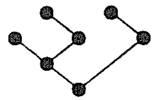
1 $\{\ 0\ |\ \} =$ 

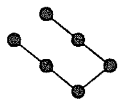
2 $\{\ 1\ |\ \} = \{\ 0,1\ |\ \} = 1 + 1 =$  $=$ 

3 $\{\ 2\ |\ \} = \{\ 0,1,2\ |\ \} = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 =$ 

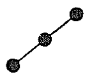
$\frac{1}{2}$ $\{\ 0\ |\ 1\ \} =$ 

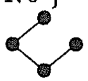
$\frac{1}{4}$ $\{\ 0\ |\ \frac{1}{2}\ \} =$ 

$\frac{3}{4}$ $\{\ \frac{1}{2}\ |\ 1\ \} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ 

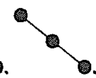
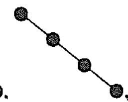
$1\frac{1}{2}$ $\{\ 1\ |\ 2\ \} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} =$ 

-1 $\{\ |\ 0\ \} =$ 

-2 $\{\ |\ -1\ \} = \{\ |\ -1, 0\ \} = -1 + (-1) =$ 

$-\frac{1}{2}$ $\{\ -1\ |\ 0\ \} = \frac{-1}{2} =$ 

± 1 $\{\ 1\ |\ -1\ \}$

ω $\{\ 0, 1, 2, \ldots\ |\ \} = \frac{1}{\varepsilon} = \{\ \bullet,$  ,  ,  $, \ldots\ |\ \}$

$\omega + 1$ $\{\ 0, 1, 2, \ldots, \omega\ |\ \} = \{\ \omega\ |\ \}$

2ω $\{\ 0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\ |\ \} = \omega + \omega$

ω^2 $\{\ 0, 1, 2, \ldots, \omega, \ldots, \omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots\ |\ \} = \omega \cdot \omega$

$\omega - 1$ $\{\ 0, 1, 2, \ldots\ |\ \omega\ \}$

$\frac{\omega}{2}$ $\{\ 0, 1, 2, \ldots\ |\ \omega, \omega - 1, \ldots\ \}$

$\sqrt{\omega}$ $\{\ 0, 1, 2, \ldots\ |\ \omega, \frac{\omega}{2}, \ldots\ \}$

$1/\omega$ $\{\ 0\ |\ 1, \frac{1}{2}, \ldots\ \} = \varepsilon$

$2/\omega$ $\{\ \frac{1}{\omega}\ |\ 1, \frac{1}{2}, \ldots\ \}$

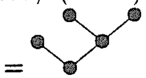
$\frac{1}{2\omega}$ $\{\ 0\ |\ \frac{1}{\omega}\ \} = \frac{\varepsilon}{2}$

ε^{ω} $\{\ 0\ |\ \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots\ \}$

$\star$ $\{\ 0\ |\ 0\ \} = \bullet 1 =$ 

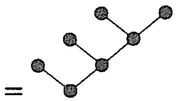
$\bullet 2$ $\{\ \bullet 0, \bullet 1\ |\ \bullet 0, \bullet 1\ \}$

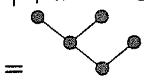
$\bullet n$ $\{\ \bullet 0, \bullet 1, \ldots, \bullet(n-1)\ |\ \bullet 0, \bullet 1, \ldots, \bullet(n-1)\ \}$

$\uparrow$ $\{\ 0\ |\ \star\ \} =$ 

$\uparrow\star$ $\{\ 0, \star\ |\ 0\ \} = \uparrow + \star = -(\downarrow\star)$

$\Uparrow$ $\{\ 0\ |\ \uparrow\star\ \} = \uparrow + \uparrow$

$\Uparrow\star$ $\{\ 0\ |\ \uparrow\ \} = \uparrow + \uparrow + \star =$ 

$\downarrow$ $\{\ \star\ |\ 0\ \} = -\uparrow =$ 

$\Downarrow$ $\{\ \downarrow\star\ |\ 0\ \} = -\Uparrow = \downarrow + \downarrow$

$\uparrow^2$ $\{\ 0\ |\ \downarrow\star\ \}$

$\uparrow 2$ $\{\ \uparrow\ |\ \star\ \} = \uparrow + \uparrow^2$

$\uparrow 3$ $\{\ \uparrow 2\ |\ \star\ \} = \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3$

$a \mid b$ $\{\ a\ |\ b\ \}$

$\{a, b, c, \ldots\}$ $\{\ a, b, c, \ldots\ |\ a, b, c, \ldots\ \}$

$\pm x$ $\{\ x\ |\ -x\ \}$

$+_x$ $\{\ 0\ |\ \{\ 0\ |\ -x\ \}\ \}$

$-_x$ $\{\ \{\ x\ |\ 0\ \}\ |\ 0\ \} = -(+_x)$

$\mathbb{N}$ $\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

∞ $\{\ \mathbb{R}\ |\ \{\ \mathbb{R}\ |\ \mathbb{R}\ \}\ \}$

$\pm\infty$ $\{\ \mathbb{R}\ |\ \mathbb{R}\ \} = \{\ \infty\ |\ -\infty\ \}$

2∞ $\{\ \mathbb{R}\ |\ \{\ \mathbb{R}\ |\ 0\ \}\ \}$

$d(x)$ $\{\ d(x^L), d(x^R)\ |\ \}$

$x \oplus y$ $\{\ x^L, x \oplus y^L\ |\ x^R, x \oplus y^R\ \}$

$x \odot y$ $\{\ x \odot y^L \oplus x^L, x \odot y^R \oplus x^R\ |\ x \odot y^L \oplus x^R, x \odot y^R \oplus x^L\ \}$

$\overline{x}$ $\{\ x^R\ |\ x^L\ \}$

Literatura

[1] Balcar, B.–Štěpánek, P.: *Teorie množin*. Academia, Praha, 1986.
[2] Berlekamp, E. R.–Conway, J. H.–Guy, R. K.: *Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele*. Band 1–4., Vieweg, 1985.
[3] Cihlář, J.–Vopravil, V.: *Hry a čísla*. Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1983.
[4] Conway, J. H.: *On Numbers and Games*. Academic Press, London, 1976, 1979.
[5] Gatial, J.–Hecht, T.–Hejný, M.: *Hry takmer matematické*. Mladá fronta, Praha, 1982.
[6] Knuth, D. E.: *Nadreálná čísla*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník XXIII (1978), č. 2–5, JČSMF, Praha, 1978.
[7] Šalát, T.: *Reálne čísla*. Alfa, Bratislava, 1982.
[8] Vít, P.: *Řetězové zlomky*. Mladá fronta, Praha, 1982.
[9] Vopěnka, P.: *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Alfa, Bratislava, 1989.
[10] Vopravil, V.–Porkert, J.: *Hry a strategie*. Rozhledy mat.-fyz., JČSMF, Praha, 2/1992.
[11] Vopravil, V.: *Umění chtít vidět (nejen) v matematice*. (Dosud nepublikováno.)

Rejstřík