

ale nesmí se protínat s jiným výhonkem, ani sama se sebou a také nesmí procházet některým z dříve nakreslených bodů. B) Z každého bodu (sazence) smějí vycházet maximálně tři výhonky (křivky). Hráč, který nemá tah, prohrál. Ověřte, zda platí:

- (i) Hra s n -uzly skončí nejpozději po $3n - 1$ tazích.
- (ii) Na dvou uzlech existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče při normální i betlové variantě hry.
- (iii) Na třech uzlech existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče (Zjistěte, zda dobrým tahem prvního hráče je opsání křivky okolo jednoho základního uzlu.), v betlové variantě existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče.
- (iv) Zjistěte, zda hra SAZENICE na n bodech (jamkách) skončí nejméně po $2n$ tazích. Věnujte pozornost těm hrám, které skončí právě po $2n$ tazích.
- (v) Hrajte SAZENICE na sedmi jamkách, strategie je dodnes neznámá.

ÚLOHA 153. Zde je místo pro vaši vlastní úlohu:

Přehled základních definic

DEFINICE (HRA). Necht L, R jsou dvě libovolné množiny her. Potom uspořádaná dvojice $(L; R)$ je hra. Všechny hry jsou vytvořeny tímto způsobem.

ÚMLUVA. Symbolem x^L , resp. x^R označujeme libovolnou levou, resp. pravou subhru (možnost, prvek, alternativu, tah, jednodušší hru, hru dříve vytvořenou, ...) hry $x \equiv (L; R)$.

Hru x zapisujeme ve tvaru $x \equiv \{ x^L \mid x^R \}$.

PŘÍKLAD.

$$0 \equiv \{ \mid \}, 1 \equiv \{ 0 \mid \}, 2 \equiv \{ 1 \mid \}, * \equiv \{ 0 \mid 0 \}, \uparrow \equiv \{ 0 \mid * \}, \\ \frac{1}{2} \equiv \{ 0 \mid 1 \}.$$

DEFINICE. Necht x, y jsou hry.

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} \{ x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R \}$$

$$-x \stackrel{\text{def}}{=} \{ -x^R \mid -x^L \}$$

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x^L \not\geq y \wedge x \not\geq y^R$$

$$x \geq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y \leq x$$

$$x = y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y \wedge y \leq x$$

$$x < y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y \wedge y \not\leq x$$

$$x \parallel y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \not\leq y \wedge y \not\leq x.$$

DEFINICE. Hru $x \equiv \{ x^L \mid x^R \}$ nazýváme Conwayovým číslem právě tehdy, když L, R jsou libovolné množiny čísel a platí-li $x^L \not\geq x^R$.

DEFINICE. Necht $x \equiv \{ x^L \mid x^R \}, y \equiv \{ y^L \mid y^R \}$ jsou čísla.

$$xy \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid \right. \\ \left. x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L \right\}.$$

DEFINICE. Necht $x \equiv \{ x^L \mid x^R \}$ je kladné číslo.

$$\frac{1}{x} \equiv y \stackrel{\text{def}}{\iff} y = \left\{ 0, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R} \mid \right. \\ \left. \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R} \right\}.$$

DEFINICE. Necht $x \equiv \{ x^L \mid x^R \}$ je nezáporné číslo.

$$\sqrt{x} \equiv y \stackrel{\text{def}}{\iff} y = \left\{ \sqrt{x^L}, \frac{x + y^L y^R}{y^L + y^R} \mid \sqrt{x^R}, \frac{x + y^L y^{L\circ}}{y^L + y^{L\circ}}, \frac{x + y^R y^{R\circ}}{y^R + y^{R\circ}} \right\}.$$

Symbols a označení

Hra:

0	$\{ \} = \bullet 0 = \bullet$	
1	$\{ 0 \} =$	
2	$\{ 1 \} = \{ 0, 1 \} = 1 + 1 =$	
3	$\{ 2 \} = \{ 0, 1, 2 \} = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 =$	
$\frac{1}{2}$	$\{ 0 1 \} =$	
$\frac{1}{4}$	$\{ 0 \frac{1}{2} \} =$	
$\frac{3}{4}$	$\{ \frac{1}{2} 1 \} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$	
$1\frac{1}{2}$	$\{ 1 2 \} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} =$	
-1	$\{ 0 \} =$	
-2	$\{ -1 \} = \{ -1, 0 \} = -1 + (-1) =$	
$-\frac{1}{2}$	$\{ -1 0 \} = \frac{-1}{2} =$	
± 1	$\{ 1 -1 \}$	
ω	$\{ 0, 1, 2, \dots \} = \frac{1}{\omega} = \{ \bullet, \bullet, \bullet, \dots \}$	
$\omega + 1$	$\{ 0, 1, 2, \dots, \omega \} = \{ \omega \}$	
2ω	$\{ 0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots \} = \omega + \omega$	
ω^2	$\{ 0, 1, 2, \dots, \omega, \dots, \omega \cdot 2, \dots, \omega \cdot 3, \dots \} = \omega \cdot \omega$	

$\omega - 1$	$\{ 0, 1, 2, \dots \omega \}$
$\frac{\omega}{2}$	$\{ 0, 1, 2, \dots \omega, \omega - 1, \dots \}$
$1/\omega$	$\{ 0, 1, 2, \dots \omega \cdot \frac{1}{2}, \dots \}$
$2/\omega$	$\{ 0 1, \frac{1}{2}, \dots \} = \varepsilon$
$\frac{1}{2\omega}$	$\{ \frac{1}{\omega} 1, \frac{1}{2}, \dots \}$
ε^2	$\{ 0 \frac{1}{\omega} \} = \frac{\varepsilon}{2}$
	$\{ 0 \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \}$
*	$\{ 0 0 \} = \bullet 1 =$
$\bullet 2$	$\{ \bullet 0, \bullet 1 \bullet 0, \bullet 1 \}$
$\bullet n$	$\{ \bullet 0, \bullet 1, \dots, \bullet(n-1) \bullet 0, \bullet 1, \dots, \bullet(n-1) \}$
\uparrow	$\{ 0 * \} =$
$\uparrow*$	$\{ 0, * 0 \} = \uparrow + * = -(\downarrow*)$
$\uparrow\uparrow$	$\{ 0 \uparrow* \} = \uparrow + \uparrow$
$\uparrow*$	$\{ 0 \uparrow \} = \uparrow + \uparrow + * =$
\downarrow	$\{ * 0 \} = -\uparrow =$
$\downarrow\downarrow$	$\{ \downarrow* 0 \} = -\uparrow\uparrow = \downarrow + \downarrow$
\uparrow^2	$\{ 0 \downarrow* \}$
\uparrow^2	$\{ \uparrow * \} = \uparrow + \uparrow^2$
\uparrow^3	$\{ \uparrow^2 * \} = \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3$
$a b$	$\{ a b \}$
$\{ a, b, c, \dots \}$	$\{ a, b, c, \dots a, b, c, \dots \}$
$\pm x$	$\{ x -x \}$
$+_x$	$\{ 0 \{ 0 -x \} \}$
$-_x$	$\{ \{ x 0 \} 0 \} = -(+_x)$
\mathbb{N}	$\{ 0, 1, 2, \dots \}$
\mathbb{Z}	$\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$
∞	$\{ \mathbb{R} \{ \mathbb{R} \mathbb{R} \} \}$
$\pm\infty$	$\{ \mathbb{R} \mathbb{R} \} = \{ \infty -\infty \}$
2∞	$\{ \mathbb{R} \{ \mathbb{R} 0 \} \}$
$d(x)$	$\{ d(x^L), d(x^R) \}$
$x \oplus y$	$\{ x^L, x \oplus y^L x^R, x \oplus y^R \}$
$x \odot y$	$\{ x \odot y^L \oplus x^L, x \odot y^R \oplus x^R x \odot y^L \oplus x^R, x \odot y^R \oplus x^L \}$
\bar{x}	$\{ x^R x^L \}$

Literatura

- [1] Balcar, B.-Štěpánek, P.: *Teorie množin*. Academia, Praha, 1986.
- [2] Berlekamp, E. R.-Conway, J. H.-Guy, R. K.: *Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele*. Band 1-4., Vieweg, 1985.
- [3] Cihlář, J.-Vopravil, V.: *Hry a čísla*. Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1983.
- [4] Conway, J. H.: *On Numbers and Games*. Academic Press, London, 1976, 1979.
- [5] Gatial, J.-Hecht, T.-Hejný, M.: *Hry takmer matematické*. Mladá fronta, Praha, 1982.
- [6] Knuth, D. E.: *Nadreálná čísla*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník XXIII (1978), č. 2-5, JČSMF, Praha, 1978.
- [7] Šalát, T.: *Reálne čísla*. Alfa, Bratislava, 1982.
- [8] Vít, P.: *Řetězové zlomky*. Mladá fronta, Praha, 1982.
- [9] Vopěnka, P.: *Úvod do matematiky v alternativnej teórii množin*. Alfa, Bratislava, 1989.
- [10] Vopravil, V.-Porkert, J.: *Hry a strategie*. Rozhledy mat.-fyz., JČSMF, Praha, 2/1992.
- [11] Vopravil, V.: *Umění chtít vidět (nejen) v matematice*. (Dosud nepublikováno.)

Rejstřík

- absolutně nestranná hra, 84
 axióm, 10
- betlová hra, 96
- col, 109
- číslo, 33, 119
 dyadické, 57
 dyadické racionální, 47
 komplexní, 58
 ordinální, 44
 převrácené, 48, 119
 přirozené, 43
 reálné, 58
 zobecnělé celé, 57
 zobecnělé přirozené, 57
- descente infinie, 12, 15
 disjunktní součet, 7
 domino, 59
 down, 17
 dyadické
 číslo, 57
 racionální číslo, 47
- epsilon, 51
- fazy, 25
 frogs, 113
- hackenbusch, 63
 hra, 7, 8, 119
 absolutně nestranná, 84
 down, 17
 epsilon, 51
 jedna, 38
 nestranná, 83
 nim, 87
 nula, 7, 9
 omega, 12
 opačná, 8, 17
 převrácená, 102
 star, 10
- symetrická, 95, 106
 transponovaná, 71
 tyčinky, 88
 up, 10
- indukce, 11, 12, 15, 16, 34
 infty, 116
- jedna, 38
- koláč, 60, 61, 117
 komplexní číslo, 58
 konstrukce her, 7–9, 119
- marienbad, 87
 menší, 21
 menší rovno, 18
 mince, 95
 minidáma, 56
 minišachy, 56
- nestranná hra, 83
 nim, 87
 nula, 9
 nulová hra, 8
- odmocnina, 52, 119
 omega, 12, 44
 opačná hra, 8, 17
 ordinální
 číslo, 44
 součet, 65
 součin, 69
- ovečka, 81
- převrácená
 hra, 102
 převrácené
 číslo, 48
 přirozené číslo, 43
- reálné číslo, 58
 redukce levých subher, 29
 rovnost her, 20

řetězce, 92

sazenice, 117

snort, 99

součet

her, 7, 13

ordinální, 65

součin

čísel, 38

ordinální, 69

star, 10

staří hry, 45

subhra, 6, 8

symetrická hra, 95, 106

tau princip, 57, 75, 105, 106

tiny, 112

transponovaná hra, 71

tyčinky, 63, 88

up, 10

výživná teorie, 60–61, 117

zobecnělé

celé číslo, 57

přirozené číslo, 57

žába, 113