Hry a čísla na příkladu hry Nim a Hackenbush

19. listopadu 2014

1 Hry a čísla I: Nim

Definice 1.1. Nestrannou hru rozumíme (ne nutně konečný) orientovaný uzlový graf s počátečním uzlem. Libovolná cesta v grafu musí mít konečnou délku. Uzly tohoto grafu se nazývají pozicemi a hrany odpovídají možným tahům z pozice do následující pozice.

Dva hráči hrají tuto hru: začínají v počáteční pozici a střídavě tahají podle orientovaných hran. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál.

Úloha 1.2. Následující hry nakreslete jako graf a zjistěte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

1. Hromádka má 8 kamenů, v jednom tahu je možné z hromádky odebrat 2 nebo 3 kameny.
2. Na šachovnici 4×4 je postaven král v levém dolním rohu. Hrát může pouze vpravo, vpravo nahoru nebo nahoru.

Úloha 1.3. Najděte formální definici vyhrávající strategie v konečné nestranné hře, ukažte, že jeden z hráčů má vyhrávající strategii.

Definice 1.4. Součtem dvou nestranných her G, H budeme nazývat hru, která se hraje paralelně na obou hrách. Pozice jsou dvojice (pozice v G a v H) a v každém tahu si hráč může vybrat buď táhnout v G nebo v H.

Úloha 1.5. Král, pohybující se pouze nahoru nebo vpravo, je součtem dvou her typu hromádky, kde dovolenými tahy jsou odebrání jednoho kamene.

Úloha 1.6. Jestliže ve hře H vyhraje druhý hráč, potom ve hře $G + H$ vyhraje stejný hráč, jako ve hře G. (Hra dopadne stejně.) Dokažte!

Definice 1.7. Jestliže ve hře H vyhraje druhý z hráčů, potom budeme říkat, že je hra nulová a píšeme $H = 0$.

Úloha 1.8.
1. Pro libovolnou nestrannou hru H platí $H + H = 0$.
2. Jestliže $G + H = 0$, potom hry G a H dopadnou stejně.

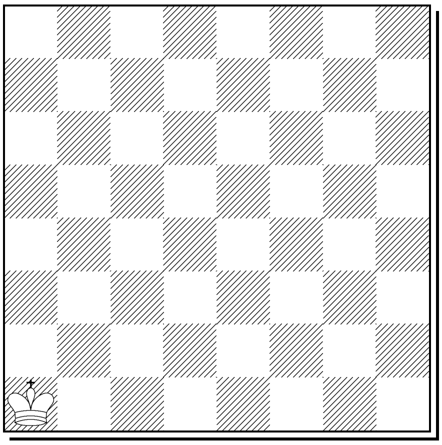


Diagram 1

Definice 1.9. Dvě nestranné hry G, H se nazývají stejné a píšeme $G = H$, pokud $G+H = 0$

Úloha 1.10. 1. Relace $=$ je ekvivalence.

2. Operace sčítání je definována na třídách rozkladu (až na rovnost). Operace je komutativní, asociativní, s nulovým prvkem a s opačnými prvky (grupa rozkladu).

Definice 1.11. Nim číslem (nimbers) $\bullet n$ nazveme hru s jednou hromádkou, ze které je možné odebírat libovolný nenulový počet kamenů.

Nim hrou rozumíme hru na několika hromádkách kamenů, v každém tahu je možné odebrat libovolný nenulový počet kamenů z jedné hromádky.

Úloha 1.12. Řešte hru Nim pro:

1. Dvě hromádky,
2. pro libovolný počet hromádek.

V každé hromádce jsou nejvýše 2 kameny.

Úloha 1.13. Dokažte, že ve všech nenulových nestranných hrách na nim číslech vyhraje první hráč a všechny jsou různé, tj. $\bullet n \neq \bullet m$ pro $n \neq m$.

Úloha 1.14. Dokažte, že každá z následujících her je rovna nim číslu a najděte tato čísla:

1. $\bullet 2 + \bullet 1$
2. $\bullet 3 + \bullet 1$.

Definice 1.15. Nechť $\{g_i\}$ je nějaká množina nestranných her. Potom sestrojíme novou nestrannou hru G, která spočívá v tom, že hráč na tahu si může vybrat libovolnou podpozici g_i. Budeme také psát, že $G = \{g_i\}$, a tedy množina nestranných her je opět hra.

Úloha 1.16. Dokažte:

1. $\bullet 0 = \varnothing$

2. $\bullet n = \{\bullet 0, \bullet 1, \dots, \bullet n-1\}$.

Úloha 1.17. Nechť P je nějaká vlastnost nestranných her taková, že

$$((\forall g \in G)\ P(g)) \Rightarrow P(G).$$

Potom vlastnost P platí pro všechny hry.

Poznámka 1.18. Kde je schován první krok indukce?

Úloha 1.19. Dokažte:

1. Nechť $G = \{\bullet n_1, \bullet n_2, \dots, \bullet n_k\}$. Potom

$$G = \bullet \min\{n \in \mathbb{N}; \bullet n \notin G\}.$$

   Jinými slovy jsou-li všechny možnosti ve hře jsou nim čísla, potom hra je rovna nejmenší neexistující možnosti.
2. Libovolná konečná nestranná hra je rovna nějakému nim číslu (Věta Sprague–Grundyova). Druhý hráč vyhraje právě a jen tehdy, je-li toto číslo nulové.

Úloha 1.20. 1. $\bullet n + \bullet m = \{\bullet n + \bullet j;\ 0 \leq j < n\} \cup \{\bullet i + \bullet m;\ 0 \leq i < n\}$.
2. V Cayleyho tabulce součtu nim čísel, v každé pozici, je to nejmenší číslo, které není nad a vlevo.
3. Sestrojte tabulku 8×8 (sčítání od $\bullet 0$ do $\bullet 7$) a potom určete, kdo vyhraje ve hře $\bullet 1 + \bullet 3 + \bullet 5 + \bullet 7$. (Marienbad.)

Úloha 1.21. Nim čísla tvoří komutativní těleso.

2 Hra a čísla II: Hackenbush

Barevnou (někdy také partyzánskou) hrou se rozumí (ne nutně konečný) orientovaný graf s počátečním uzlem a hrany dvou barev, L a R. Libovolná orientovaná cesta v grafu má konečnou délku.

Dva hráči, levý a pravý, hrají hru. Začínají v počáteční pozici a střídavě tahají po orientovaných hranách své barvy. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál.

Úloha 2.1. Dokažte:

1. Nechť G je barevná hra. Hra $-G$ je hra, ve které vyměníme barvy hran. Potom $G + (-G) = 0$.
2. Rovnost her $G + (-H) = 0$ je ekvivalence.

Definice 2.2. Hra G se nazývá:

1. nulovou ($G = 0$) ($\rightsquigarrow 2$) právě, když existuje vyhrávající strategie pro II. hráče
2. kladnou ($G > 0$) ($\rightsquigarrow L$) právě, když existuje vyhrávající strategie pro levého hráče
3. zápornou ($G < 0$) ($\rightsquigarrow R$) právě, když existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče

4. fazy ($G \parallel 0$) ($\rightsquigarrow 1$) právě, když existuje vyhrávající strategie pro I. hráče.

Úloha 2.3. Dokažte:

1. Libovolná hra přísluší do právě jedné rozkladové třídy (viz 2 a 2.2).
2. Pokud jsou si hry rovny, patří do stejné třídy.

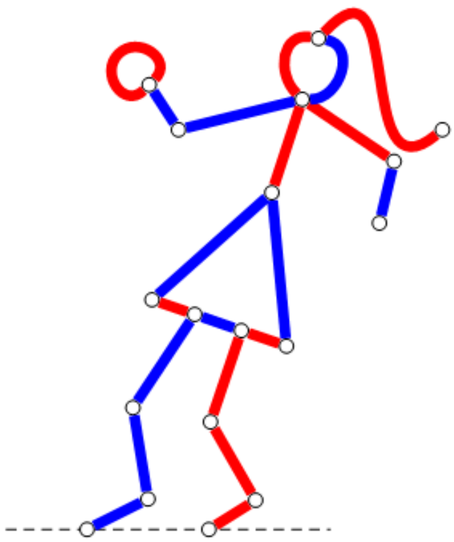
Úloha 2.4. Dokažte:

1. Součet dvou kladných her je kladná hra.
2. Výsledek součtu dvou fazy her může být v libovolné třídě.

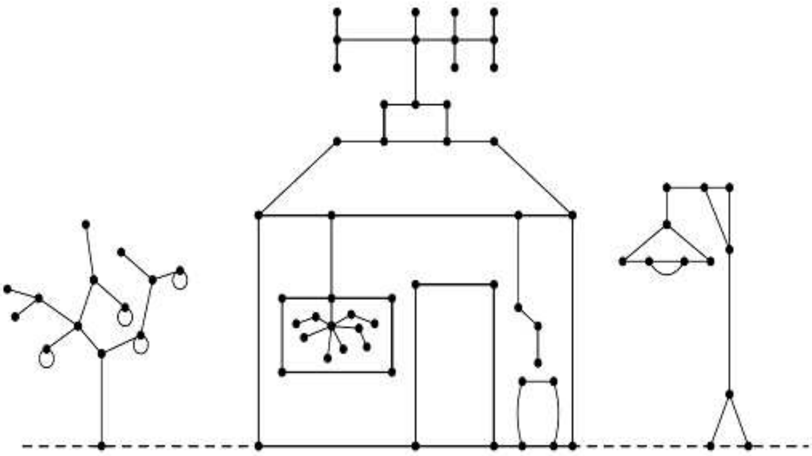
Definice 2.5. Nechť je dán spojitý neorientovaný graf s počátečním uzlem a hrany jsou obarveny dvěma barvami L a R. Tahem ve hře Hackenbush na tomto grafu spočívá v tom, že hráč odebere jednu hranu své barvy a také všechny části, které již nesouvisí s počátečním uzlem. S odstraněnými hranami se již nehraje. Hráči se v tazích střídají a hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

Úloha 2.6. Žádná hra Hackenbush není fazy. Jinými slovy hra dopadne jako > 0, < 0 nebo $= 0$. Neexistuje graf, na kterém by vyhrál první hráč.

Úloha 2.7. Typické postavení ve hře Hackenbush je jako na obrázku. Do jaké třídy patří (kdo vyhraje)? Hru porovnejte s nulou.



Úloha 2.8. V nestranné variantě hry může hráč odebírat libovolnou větvičku (hranu). Nalezněte první tah ve hře na obrázku



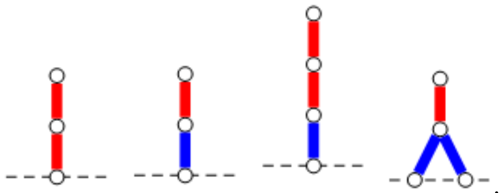
Úloha 2.9. Definujte součet her HACKENBUSH.

Definice 2.10. Hra s hodnotou 1 je na jedné hraně s obarvenou L. Je-li p/q racionální číslo, potom hra p/q je hra HACKENBUSH taková, že po násobení (opakované sčítání) q je rovna p.

Úloha 2.11. Jsou-li dvě hry HACKENBUSH rovny stejnému číslu, potom jsou si také rovny. Mimo to navíc, součet a porovnání odpovídá součtu her a uspořádání.

Úloha 2.12. Nalezněte pozice, které odpovídají celým číslům.

Úloha 2.13. Nalezněte číselnou hodnotu HACKENBUSH na následujících grafech:



Úloha 2.14. Konečný řetězec (had) HACKENBUSH má za hodnotu dyadické číslo.

Úloha 2.15. Existuje takový HACKENBUSH, který by měl hodnotu 1/3?

Úloha 2.16. Nekonečný had HACKENBUSH z levých hran má hodnotu větší než libovolné přirozené číslo.

Úloha 2.17. Najděte hodnotu periodického hada:

2.1 Nadreálná čísla

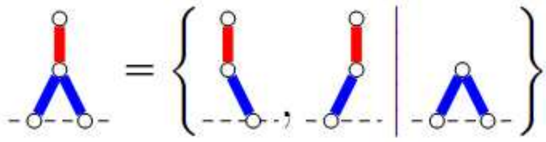
Libovolnou pozici g ve hře G můžeme považovat za novou hru (pozici). Tuto hru také označujeme g.

Úloha 2.18. Jestliže ve hře HACKENBUSH pro levého existuje tah z pozice g do pozice h, potom platí $h < g$. Vyslovte analogickou větu pro pravého hráče a větu dokažte.

Úloha 2.19. Nadreálným číslem rozumíme systém monotonních her z předcházející úlohy (až na rovnost).

Úloha 2.20.
1. Součet dvou čísel je číslo,
2. libovolná dvě čísla jsou porovnatelná.

Definice 2.21. Nechť L a R jsou dvě množiny čísel, $L \not\geq R$. Potom je možné definovat novou partyzánskou hru G. Hru budeme zapisovat $G = \{L \mid R\}$. Například



Úloha 2.22. Nalezněte hodnoty těchto her (čísel):

1. $\{0 \mid 1\}$
2. $\{0 \mid 1/2, 1\}$
3. $\{-1 \mid 5\}$.

Úloha 2.23. Je-li $L \leq R$, potom hodnota $\{L \mid R\}$ leží mezi L a R.

Úloha 2.24. Z předcházející úlohy lze odvodit, že nadreálná čísla nejsou archimedovská.

Úloha 2.25.
1. Libovolný konečný HACKENBUSH je roven dyadickému racionálnímu číslu.
2. Je-li $\{L \mid R\}$, $L < R$ takové, že jsou konečné množiny dyadických čísel, potom $\{L \mid R\}$ je nejjednodušší dyadické číslo mezi L, R.

Úloha 2.26.
1. Je-li $x = \{L \mid R\}$ a $x' = \{L' \mid R'\}$, potom

$$x + x' = \{x + L', L + x' \mid x + R', R + x'\}.$$

2. Uvažujme libovolné uspořádané těleso a nechť platí: $a \leq x \leq b$ a $a' \leq x' \leq b'$. Určete, která čísla jsou kladná a která záporná z následujících výrazů: $(x-a)(x'-a')$, $(x-a)(x'-b')$, $(x-b)(x'-a')$, $(x-b)(x'-b')$. Výsledek zapište ve tvaru xx'. Tyto úvahy vedou k nalezení odpovídající definici násobení (součinu) nadreálných čísel.

Úloha 2.27.
1. Nadreálná čísla tvoří okruh.
2. Nadreálná čísla tvoří komutativní těleso.

Úloha 2.28.
1. Vnořte reálná čísla do nadreálných čísel.
2. Na komutativním tělese existuje uspořádání právě a jen tehdy, je-li izomorfní s podtělesem nadreálných čísel.

Doporučená literatura

[CGT] A. Siegel: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013

[HS] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník **70** (1992), str. 52-57

[Kvant] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: Сюрреалные числа (rus. *Syurrealnye chisla*), in Kvant **11** (1979)

[LIP] M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*, A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA, 2007

[OGAN] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995, ISBN 8070441046

[ONAG] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976, ISBN 0-12-186350-6, (*Über Zahlen und Spiele*, Vieweg, Braunschweig, 1983, ISBN 3528084340), 2ed. 2001, ISBN 1-56881-127-6

[SN] D. E. Knuth: *Surreal Numbers*; How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974), vi+119 pp. ISBN 0-201-03812-9, Illustrated by Jill C. Knuth; Czech translation by Helena Nešetřilová, *Nadreálná čísla*, in Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261

[SS] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal, 6:359, 2006

[TKH] *Úvod do teorie kombinatorických her*, http://cgt.ic.cz/hs (červenec 2011)

[WW] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; *Gewinnen*, Vieweg, 1985, ISBN 3528085312, ISBN 3528085320, ISBN 3528085339, ISBN 3528085347); (*Winning Ways*, Academic Press, 1982, ISBN 0-12-091101-9, ISBN 0-12-091102-7); 2ed. vol. 1-4 , A. K. Peters Ltd., 2001-2004, ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6

[2hs03RMF actual 57d-nim-hackenbush.tex, 19/11/14, 19:35]