Hry a strategické myšlení

Václav Vopravil

Kombinatorickými hrami budeme rozumět hry dvou hráčů (hráči se tradičně označují Levý a pRavý, bíLý a čeRný,..., stručně L a R hráč), které splňují následující neformální požadavky:

(a) Hra má několik (zpravidla konečný) počet pozic. Jedna z těchto pozic se nazývá počáteční.
(b) Pravidly jsou stanoveny všechny povolené tahy. Tahem je míněna změna ze současné pozice do nové pozice. Všechny nové pozice se nazývají možnostmi. Oba hráči mají stejnou informaci o hře.
(c) Hráči se v tazích střídají dokud nedosáhnou koncové pozice.
(d) Hráč na tahu má k dispozici veškeré informace o hře; všechny možné budoucí možné tahy, a je-li to nezbytné, také předcházející možné tahy.
(e) Ve hře nehraje žádnou roli náhoda, štěstí, blufování,...
(f) Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál a jeho soupeř vyhrál (normální varianta hry).

Jistě má smysl se ptát, které hry jsou kombinatorické, jaký mají hry výsledek? Skončit hry mohou vítězstvím jednoho z hráčů (a tedy prohrou protihráče) nebo patem (remízou). Vždy budeme předpokládat, že oba hráči nebudou dělat chyby a budou hrát hru optimálně. Racionální tah znamená nejvýhodnější tah. Hráč na tahu, pokud nemůže již dále táhnout, prohrál (a druhý vyhrál). Jinými slovy hry skončí patem, pokud oba hráči hrají racionálně a pravidla hry umožňují neprohrát (ale pro protihráče také nevyhrát).

Přijmeme ještě několik omezujících podmínek na vyšetřovaní hry. Jednou z nich je pravidlo

(g) Hra skončí po konečně mnoha tazích (s výsledkem výhry jednoho z hráčů, nebo patem).

Budeme požadovat, aby hra byla zcela determinována, tj. výsledkem hry bude právě jedna z těchto možností:

1. Levý hráč vyhraje a nezáleží na tazích pravého,
2. pravý hráč vyhraje a přitom nezáleží na tazích levého hráče,
3. oba hráči mohou dosáhnout patu (mají neprohrávající strategii), bez ohledu na tahy protihráče (aniž by se domlouvali).

Požadavek (g) zesílíme a budeme požadovat, aby pravidly hry bylo vždy zaručeno, aby hra skončila (hráč, který nemůže táhnout, prohrál) (*podmínka konce hry*).

Klíčovou otázkou ve hrách je nalezení, který z hráčů má vyhrávající strategii. Strategie hráče určuje jak hráč bude postupovat (táhnout) v jednotlivých pozicích. Vyhrávající strategie hráči zabezpečí výhru bez ohledu na možné tahy protihráče.

Strukturární indukcí je možné jednoduše dokázat, že každá kombinatorická hra dvou hráčů s úplnou informací má vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů.

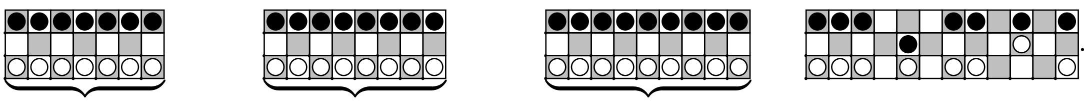
Dawsonovy šachy

Hru DAWSONOVY ŠACHY[1] hrají dva hráči. Hráči se v tazích střídají, a pokračují podle pravidel hry, dokud hra neskončí (hráč na tahu nemůže táhnout). Tradičně se hráči nazývají bíLý a čeRný. Hraje se na šachovnici, ale pouze na prvních třech řádcích. Na počátku hry jsou bílé kameny v první řadě a černé v horní řadě. Cílem hry je znemožnit hráči provést tah (normální varianta hry), tj. zvítězí hráč, který udělá poslední tah. Ve hře začíná hráč s bílými kameny.

Kameny se přesouvají jako šachový pěšci - *o jedno pole* přímo vpřed (pokud je pole volné) nebo, když stojí na sousedním poli v diagonálním směru soupeřův kámen, o jedno pole šikmo vpřed. Stojí-li dva pěšci proti sobě (sousedí spolu ve stejném sloupci), nemohou se brát (neplatí šachové pravidlo *en passant*). Když pěšec postoupí šikmo vpřed na pole, kde leží soupeřův kámen, je soupeřův kámen odebrán. Braní kamenů je povinné. S pěšcem, který došel na protější konec desky, už není možné dál hrát.

Úloha: Nejprve si zahrajte několik partií. Rozmyslete si, že Dawsonovy šachy jsou kombinatorickou hrou. Zahrajte si také variantu, ve které braní kamenů není povinné. Kdo vyhraje, pokud v každém tahu si vybere svůj nejlepší tah ve hrách 3×3, 4×3, resp. 5×3. Bílý nebo černý hráč? Jaký bude první tah vítěze?

Úlohy: Bílý a černý hráč hrají Dawsonovy šachy:



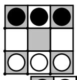
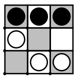
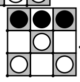
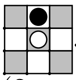
7×3 Dawsonova úloha 8×3 9×3

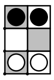
1. Budeme předpokládat, že na tahu je bílý hráč v počáteční pozici jako je na prvním obrázku (šachovnice 7×3). Může si hráč svým tahem zabezpečit vítězství? Pokud ano, jak?
2. V pozici jako je na druhém obrázku černý hráč nabídne, aby bílý hráč začínal. Přijme bílý hráč tuto nabídku? Pokud ji odmítne, proč?
3. Bílý hráč navrhne zahrát si na šachovnici 9×3 jako na třetím obrázku, nebo nějakou jinou hru na šachovnici $(2n-1) \times 3$, kde n je kladné celé číslo. Černý hráč jeho nabídku neakceptuje, ledaže by ve hře začínal. Proč?
4. Hra se dostala do pozice jako je na posledním obrázku. Bílý hráč je na tahu. Může vyhrát? A proč?

Nápověda: Při analýze využijeme jednak vynucené tahy a rozdělení hry na disjunktní části. Nejdříve předpokládejme, že máme dostatečné dlouhou šachovnici a první tah

[1] Thomas Rayner Dawson (1889 – 1951), šachový teoretik, úlohu formuloval v její betlové variantě r. 1935.

bílého bude posledním kamenem. Černý je donucen brát a bílý hráč dokončí. Výsledná šachovnice bude o dva sloupce menší. Dále předpokládejme, že bílý zahájí tahem předposledním kamenem. Vynucenými tahy se šachovnice zmenší o tři sloupce. Tyto tahy připomínají odebírání kamenů ve hře NIM$[2,3;n]$. Začne-li bílý „někde ne na kraji“, po vynucených tazích se odeberou tři sloupce a šachovnice se rozpadne na dvě části. Má-li šachovnice pouze jeden sloupec, první tah zablokuje soupeře. Tato analýza nám dovoluje problémy Dawsonových šachů převést na úlohu typu NIM. Na počátku hry je na stole hromádka n kamenů. Dovolenými tahy jsou (a) odebrání jednoho kamene v případě, že hromádka obsahuje pouze jeden kámen, (b) odebrání dvou kamenů, (c) odebrání tří kamenů a případné rozdělení hromádky na dvě.

Například bílý hráč z pozice  má na výběr dva různé tahy (symetrické pozice vynecháme):  (špatný tah) a . Druhý tah je pro bílého optimální, protože bílý po vynucených tazích dokončí do pozice . Podobnou úvahou získáme, že první hráč má vyhrávající strategii na šachovnicích $(2n+3) \times 3$ (optimální tah je táhnout prostředním kamenem a kopírovat tahy). Analyzujte také pozice pro $n = 4, 5, \ldots$ a určete první optimální tah pro šachovnici 10×3.

Poznámka: Sprague-Grundyova posloupnost $\mathcal{G}$ Dawsonových šachů začíná: 0, 1, 1, 2, 0, 3, 1, 1, 0, 3, 3, 2, 2, 4, 0, 5, 2, 2, 3, 3, 0, 1, 1, 3, 0, 2, 1, 1, 0, 4, 5,… Posloupnost $\mathcal{G}(n)$ je periodická s periodou 34, ale se sedmi výjimkami (poslední je $n = 51$). Například pro $n = 2$ je  $= \{+_2 \mid -_2\} = * = \bullet 1$.

Hry s odebíráním předmětů

Neformální pravidla těchto her jsou tato:

1. Dva hráči, tradičně Levý a Pravý hráč, L a R, střídavě odebírají kameny z jedné (nebo více) hromádek.
2. Pravidly hry je určeno kolik lze v jednom tahu odebírat kamenů. Tato čísla jsou kladná, pro oba hráče stejná (a neměnná). Obecně taková množina S může být nekonečná, ale my se zaměříme pouze na konečné množiny S.
3. Každé odebrání kamenů se nazývá tahem.
4. Hráč, který ve hře zahraje poslední pravidly povolený tah, vyhrál. Poslední hráč odebere poslední kámen a následující hráč již žádný pravidly povolenými tahy, nemůže kameny odebírat. (Jinak by porušil pravidla.)
5. Ve hře je vždy jeden z hráčů vítězem. (Ve hře nemůže nastat patová nebo remízová situace).

Zápisem SUBST$[s_1, s_2, \ldots; n]$ budeme rozumět hru na jedné hromádce o n kamenech a v každém tahu je možné odebrat pouze $s_1, s_2, \ldots$ kamenů. Označíme S množinu $\{s_1, s_2, \ldots\}$. Počet n je *počáteční pozice* hry, jinou možnou pozicí je SUBST$[s_1, s_2, \ldots; n - s_1]$.

Tak jako v příkladu Dawsonových šachů, můžeme všechny pozice hry znázornit konečným obyčejným orientovaným grafem bez kružnic (DAG). Pozice ve hře znázorníme uzly grafu a jednotlivé možné tahy orientovanými hranami. Například z pozice $\textsc{Subst}[1,3;9]$ vedou dvě šipky do pozic $\textsc{Subst}[1,3;9-1]$, $\textsc{Subst}[1,3;9-3]$, tj. $\textsc{Subst}[1,3;8]$ a $\textsc{Subst}[1,3;6]$, atd.

Protože hra nemůže být patová, můžeme jednotlivé pozice označovat takto:

(a) koncovou pozici označíme $\mathcal{P}$.
(b) Pozice, ze kterých vede alespoň jedna šipka (tah) do pozice $\mathcal{P}$, označíme $\mathcal{N}$ pozicí,
(c) pozice, ze kterých vede tah pouze do $\mathcal{N}$ označujeme také $\mathcal{P}$.

V pozicích $\mathcal{P}$ existuje vyhrávající strategie pro II. hráče a nazývají se nulové. Pozice $\mathcal{N}$ se nazývají nenulovými a označují situaci, kdy ve hře existuje vyhrávající strategie pro I. hráče (ten, který ve hře začíná).

Pozice $\mathcal{P}$ znamená, že *p*ředcházející hráč zahrál vítězný tah, pozice $\mathcal{N}$ *n*ásledující, a nezáleží na tom, jak bude protihráč hrát. Najít takové tahy a takové pozice, která hráči zaručí výhru je předmětem strategie ve hře. Vyhrávajících tahů v dané hře může být i více, ale ne všechny tahy z vyhrávající pozice jsou vždy vyhrávajícími tahy.

Příklad:

(1) značkovacím algoritmem získáme, že $\textsc{Subst}[1,3;9]$ je $\mathcal{N}$ pozice a
(2) $\mathcal{G}(\textsc{Subst}[1,3;9]) = 1$.

Hra se nazývá $\mathcal{N}$ hra, pokud je v počáteční pozici $\mathcal{N}$. *Hra se nazývá $\mathcal{P}$ hra*, pokud je v počáteční pozici $\mathcal{P}$. Oba hráči hrají racionálně a nedělají záměrně chyby.

Bude-li hráč v pozici $\mathcal{N}$, budeme také říkat, že hráč vyhraje (existuje vyhrávající strategie pro I. hráče). Z $\mathcal{P}$ pozice nemůže vést nějaký vyhrávající tah. Takže: v kombinatorických hrách a tím i ve hrách s odebíráním kamenů, jsou z jistého hlediska důležité $\mathcal{P}$ pozice. Pokud narazíme na nějakou $\mathcal{N}$ pozici, z této pozice může vést i několik tahů, ale vždy alespoň jeden tah do $\mathcal{P}$ pozice. Tento tah je tahem vítězným (správným tahem). Takový tah dostane protihráče do $\mathcal{P}$ pozice (předcházející hráč má vyhrávající strategii), ve které buď již není žádný tah (koncová pozice) nebo všechny tahy vedou pouze do $\mathcal{N}$ pozic, ve který opět hráč uplatňuje tuto strategii (následující hráč má vyhrávající strategii).

Příklad: Hra $\textsc{Subst}[1,3;9]$ je $\mathcal{N}$ hra, pozice $\textsc{Subst}[1,3;6]$ je $\mathcal{P}$ pozice, protože hráč může zahrát do pozic $\textsc{Subst}[1,3;5]$, resp. $\textsc{Subst}[1,3;3]$. Obě dvě jsou $\mathcal{N}$ pozice. Například z druhé pozice se můžeme dostat do nulové pozice $\textsc{Subst}[1,3;3-3]$ odebráním tří kamenů.

Pokud analyzujeme hru, obvykle se odvoláváme na prvního hráče (hráče, který ve hře začíná, otevírá hru). Také ho označujeme jako hráče na tahu (následující hráč). Jeho protihráč se nazývá předcházejícím hráčem. Tuto terminologii zavádíme z důvodu, že nějaká pozice ve hře mohla vzniknout pomocí předcházejících tahů. Jedna počáteční pozice mohla vzniknout z nějaké složitější hry jako možnost nějakého tahu. Například hra $\textsc{Subst}[1,3;9]$ je možností ze hry $\textsc{Subst}[1,3;9+1]$ po tahu – odebrání jednoho kamene.

Hry s odebíráním předmětů můžeme studovat (řešit) analýzou stromu hry. Ovšem tato metoda selhává pro bohaté stromy hry. Např. hra $\textsc{Subst}[1,3;39]$ je $\mathcal{N}$ hra, ale strom hry je příliš košatý.

Soustřeďme se nyní na všechny hry s odebíráním předmětů. Můžeme odebírat $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kamenů a budeme předpokládat, že $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$.

Označení pozic: $\textsc{Subst}[S;0]$, $\textsc{Subst}[S;1]$, $\textsc{Subst}[S;2]$, ... potenciálně nekonečné posloupnosti her. Pro každou počáteční pozici 0, 1, 2, ... stanovíme, zda se jedná o $\mathcal{N}$ nebo o $\mathcal{P}$. Začneme od 0. Koncová pozice je vždy $\mathcal{P}$ pozice. V každém kroku okamžitě označíme pozice $\textsc{Subst}[S;s_1]$, $\textsc{Subst}[S;s_2]$,...,$\textsc{Subst}[S;s_n]$ jako $\mathcal{N}$ pozice, protože jedním tahem se dostaneme do pozice $\mathcal{P}$. Vezme nyní nejmenší index i a uvažujme neoznačenou pozici $\textsc{Subst}[S;i]$. Tato pozice může být koncová (a je tedy $\mathcal{P}$ pozicí). Nebo z této pozice vede tah, ale pouze do $\mathcal{N}$ pozice. Proto tuto pozici nazveme $\mathcal{P}$ pozicí. Odtud ale získáme, že všechny pozice $\textsc{Subst}[S;i+s_1]$, $\textsc{Subst}[S;i+s_2]$, ..., $\textsc{Subst}[S;i+s_n]$ jsou také $\mathcal{N}$. (Jedním tahem se dostaneme do $\mathcal{P}$ pozice). Metoda nápadně připomíná Eratosthenovo síto.

Zastavme se na chvíli: hledáme-li okolí pozice, jedná se o konečnou topologickou vlastnost. Hledáme vlastně bezprostředního následovníka, resp. předchůdce (tj. dostáváme svaz). Vyšetřujeme-li koncovou pozici, pomocí ní získáváme informace o větší a větší množině základních postavení, a to rekurzivně. Hra $\textsc{Subst}[S;k]$ je $\mathcal{N}$ hrou, pokud alespoň jeden tah (odebrání kamenů) $k-s_1$,$k-s_2$,...,$k-s_j$,...,$k-s_n$ je $\mathcal{P}$ pozice. Pozice $\textsc{Subst}[S;k]$ je $\mathcal{P}$, pokud $k < s_1$ (koncová pozice, z hromádky nelze odebrat kámen), nebo všechny pozice $\textsc{Subst}[S;k-s_1]$, $\textsc{Subst}[S;k-s_2]$,..., $\textsc{Subst}[S;k-s_j]$,...,$\textsc{Subst}[S;k-s_n]$ jsou $\mathcal{N}$ pozicemi.

Příklad: Analyzujme hru $\textsc{Subst}[3,4;k]$. Je-li $k=0$, jedná se o koncovou pozici a ta je $\mathcal{P}$ pozicí. Potom pozice $\textsc{Subst}[3,4;3]$ a $\textsc{Subst}[3,4;4]$ jsou $\mathcal{N}$ pozicemi. Vezměme $k=1$. Pozice $\textsc{Subst}[3,4;1]$ je $\mathcal{P}$ pozice, protože z hromádky s jedním kamenem nemůžeme odebrat stanovený počet kamenů. Také pro $k=2$ dostáváme $\mathcal{P}$ pozici. Další číslo je $k=5$. tato pozice je $\mathcal{N}$, protože mj. stačí odebrat 4 kameny. Z pozice $\textsc{Subst}[3,4;5]$ není tah do $\mathcal{P}$ pozice. Pozice $\textsc{Subst}[3,4;6]$ je také $\mathcal{N}$ pozicí.

Příklad: Analyzujme hru $\textsc{Subst}[1,3,4;k]$:

k	0	1	2	3	4	5	...
$\mathcal{P}/\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	...

Pozice $\textsc{Subst}[1,3,4;0]$ je $\mathcal{P}$ pozice (nulová), z pozice $\textsc{Subst}[1,3,4;1]$ jedním tahem se dostaneme do $\mathcal{P}$ pozice a tedy tato pozice je $\mathcal{N}$. Z pozice $\textsc{Subst}[1,3,4;2]$ se jedním tahem můžeme dostat pouze do $\mathcal{N}$ pozice a proto je tato pozice $\mathcal{P}$. Označme koncovou pozici znakem 0. Následující pozice budeme označovat kladným číslem, které je nejmenší z čísel, kam se již jedním tahem nedostaneme. Konkrétně hodnota $k=1$ bude jedna, protože se mužeme jedním tahem dostat do 0. Hodnota pro $k=2$ je ale opět nulovou, protože se můžeme dostat pouze do pozice 1. Pozice $k=3$ má hodnotu 1, ale pozice $k=4$ má hodnotu 2, protože jedním tahem se dostaneme do pozic, které jsou označeny $0,1$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mathcal{P}/\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	
		0	1	0,0	1,0	2,0,1	3,1,0	2,2,1	
mex	0	1	0	1	2	3	2	0	...

Nechá se očekávat, že posloupnost N a P bude periodická, resp. lze vyslovit hypotézu, že posloupnost pozic hry $\{0, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 0, 1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je periodická a hypotézu dokázat matematickou indukcí. Tato vlastnost je společná všech hrám s odebíráním předmětů s konečnou množinou $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

Příklad: Vraťme se k analýze hry Subst$[3, 4; k]$. Stejným způsobem pomocí „nejbližšího okolí“ pozice získáme tabulku:

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
k =	0	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	25	27

Každé pozici ve hře s odebíráním předmětů můžeme přiřadit číslo, které budeme nazývat Grundyovou hodnotou. Označme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Uvažujme hru s odebíráním kamenů Subst$[s_1, s_2, \ldots, s_n; k]$. Označme $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Označíme $\mathcal{G}(0) = 0$ a $\mathcal{G}(k) = -1$ pro záporná celá čísla k. Potom pro každé kladné číslo m označíme $S_k = \{u \in \mathbb{N}; u = \mathcal{G}(k - s_j), \text{pro všechna} j = 1, 2, \ldots, n\}$. Množina S_k je množinou nezáporných čísel. $\mathcal{G}(k - s_1), \mathcal{G}(k - s_2), \ldots, \mathcal{G}(k - s_n)$. Definujeme $\mathcal{G}(k) = \min(\mathbb{N} \setminus S_k)$. $\mathcal{G}$ je posloupnost $\mathcal{G} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taková, že $\mathcal{G}(k)$ je nezáporné pro nezáporné k. Tato posloupnost se nazývá *Grundyova posloupnost*.

Příklad: Vraťme se k analýze hry Subst$[3, 4; k]$ a spočítejme hodnoty posloupnosti $\mathcal{G}(k)$.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{G}(k-3)$	-1	-1	-1	0	0	
$\mathcal{G}(k-4)$	-1	-1	-1	-1	0	
S_k	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{0\}$	
$\mathbb{N} - S_k$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$	$\{1, 2, \ldots\}$	
$\mathcal{G}(k)$	0	0	0	1	0	...

Obecně dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(7k) = \mathcal{G}(7k+1) = \mathcal{G}(7k+2) &= 0, \\ \mathcal{G}(7k+3) = \mathcal{G}(7k+4) = \mathcal{G}(7k+5) &= 1, \\ \mathcal{G}(7k+6) &= 2. \end{aligned}$$

NIM

Hru Nim hrají dva hráči (L a R, resp. I. a II. hráč), střídavě odebírají kameny z několika hromádek. Ve svém tahu musí vždy odebrat nejméně jeden kámen, ale vždy pouze z jedné hromádky. Hráč, který udělal poslední pravidly povolený tah, vyhrál, protože hráč na tahu již nemůže táhnout (na hromádce nejsou kameny).

Tak jako v případě Dawsonových šachů a nebo Her s odebíráním předmětů, hra Nim má následující vlastnosti:

1. hru hrají dva hráči.
2. ve hře je několik (zpravidla konečný) počet pozic a jedna pozice počáteční,
3. hráči se v tazích střídají, dokud nedosáhnou koncové pozice,
4. v normální variantě hry, hráč, který udělá poslední tah, vyhrál.
5. Pravidly hry je zaručeno, že vždy po konečně mnoha tazích dojde ke koncové situaci, pravidla nepřipouští pat a ani remízu (opakování tahů a pod.).
6. Oba hráči vždy znají všechny možné tahy a pozice, žádnou roli zde nehraje náhoda.

Dawsonovy šachy, Hry s odebíráním předmětů a hry Nim splňují následující podmínku:

7. Pravidla hry nerozlišují mezi hráči. To znamená tah z dané pozice, který může udělat jeden z hráčů, může také udělat druhý hráč. Záleží jen na tom, který z hráčů je právě na tahu.

Takové kombinatorické hry se nazývají *nestranné*.

Pozici s n hromádkami a s počtem kamenů $p_1, p_2, \ldots, p_n$ označíme $\text{Nim}[p_1, p_2, \ldots, p_n]$. Na pořadí $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nezáleží. Takže například pozice $\text{Nim}[p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n]$ je stejná, jako pozice $\text{Nim}[p_2, p_1, p_3, \ldots, p_n]$. Obvykle budeme předpokládat, že na každé hromádce v počáteční pozici je alespoň jeden kámen. Takže například pozice $\text{Nim}[n, 0]$ je stejná jako pozice $\text{Nim}[n]$. Pozice, na které není již žádná hromádka, se označuje 0. Budeme tedy předpokládat, že hra začíná z nějaké pozice $\text{Nim}[p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n]$.

Příklad: Uvažujme třeba pozici $\text{Nim}[2, 2]$. Prvním tahem s hráč může dostat do pozice $\text{Nim}[2, 1]$ nebo $\text{Nim}[2, 0]$. Z pozice $\text{Nim}[2, 1]$ se hráč může dostat do pozice $\text{Nim}[2, 0]$, $\text{Nim}[1, 1]$ nebo $\text{Nim}[0, 1]$. Z pozice $\text{Nim}[2, 0]$, tj. $\text{Nim}[2]$ se hráč může dostat do pozic $\text{Nim}[1]$ nebo $\text{Nim}[0]=0$, atd.

Pozice $\text{Nim}[2, 2]$ je $\mathcal{P}$ pozice. Protože ať zahraje I. hráč jakkoliv, II. hráč ve druhé hromádce může vždy zahrát stejný tah. Pozice $\text{Nim}[3, 2]$ je naopak jistě $\mathcal{N}$ pozicí, protože alespoň jeden první tah vede do $\mathcal{P}$ pozice (a tím je právě pozice $\text{Nim}[2, 2]$).

Hru Nim můžeme analyzovat stejnými prostředky jako hry Dawsonovy šachy, nebo Hry s odebíráním kamenů. Podotkněme, že opět sestrojení stromu hry může být někdy komplikované.

Úloha: Uvažujme následují pozice ve hře Nim.

1. $\text{Nim}[2, 3, 7, 5, 6]$
2. $\text{Nim}[23, 7, 56]$
3. $\text{Nim}[1, 2, 4, 8, 16]$

Zjistěte, zda pozice hry je $\mathcal{N}$. Pokud daná pozice je $\mathcal{N}$, určete všechny vyhrávající tahy!

Úloha: Uvažujme následující hry Nim na jedné hromádce se 14 kameny s omezením možných tahů.

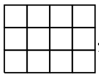
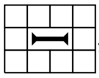
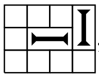
1. $\text{Nim}[1, 4, 7; 14]$
2. $\text{Nim}[1, 2, 3, 4, 7; 14]$
3. $\text{Nim}[3, 4, 6; 14]$

Pro každou hru určete (a) $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ pozice. Pokud je hra v $\mathcal{N}$ pozici, (b) popište vyhrávající strategii. Určete také (c) Grundyovy hodnoty všech pozic.

Boutonova metoda (1902): Na této metodě si ukážeme, proč není výhodné studovat nestranné hry pomocí stromů (příliš mnoho možností, strom je nepřehledný).

Příklad: Zkuste si několik počátečních pozic ve hře Nim$[1, 3, 5, 6, 45]$ a pod.

Hry Cram a Dominování

Obě hry mají podobná pravidla. Dva hráči střídavě pokládají kostky domina 2×1 a 1×2 na políčka šachovnice $m \times n$. Kostky se nesmějí překrývat. Hráč, který položil poslední kostku, vyhrál (hráč, který již nemůže položit kostku, prohrál). Pokud není žádné omezení na orientaci kostek, hra se nazývá Cram. Pokud levý hráč může pokládat pouze kostky vertikálně a pravý hráč horizontálně, hra se nazývá Dominování.
Příklad: Možná partie může vypadat třeba takto: , , , atd.

Tak jako ve hrách Dawsonovy šachy, Hry s odebíráním kamenů a hry Nim,

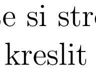
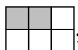
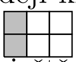
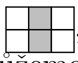
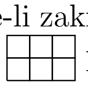
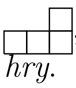
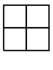
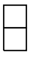
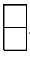
1. hru hrají dva hráči,
2. ve hře je několik (zpravidla konečný) počet pozic a jedna pozice počáteční,
3. hráči se v tazích střídají, dokud nedosáhnou koncové pozice,
4. v normální variantě hry, hráč, který udělá poslední tah, vyhrál.
5. Pravidly hry je zaručeno, že vždy po konečně mnoha tazích dojde ke koncové situaci, pravidla nepřipouští pat a ani remízu (opakování tahů a pod.).
6. Oba hráči vždy znají všechny možné tahy a pozice, žádnou roli zde nehraje náhoda.

Tak jako Dawsonovy šachy, Hry s odebíráním kamenů a hry Nim, i hra Cram je nestranná, tj. platí

7. Pravidla hry nerozlišují tahy obou hráčů. Z dané pozice všechny dostupné tahy jednoho z hráčů jsou i možnostmi druhého hráče, a to v každé pozici. Záleží jen na tom, který z hráčů začíná.

Hra Dominování tuto poslední podmínku nesplňuje, je příkladem tzv. *partyzánské hry.*

Budeme nejdříve analyzovat hru Cram stejnými prostředky, jako hry Dawsonovy šachy, hry s odebíráním kamenů a hry Nim. Každou pozici ve hře budeme označovat $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$ pozicí.

Příklad: Uvažujme například hru Cram na šachovnici 2×3 jako na obrázku . V prvním tahu je možných celkem sedm možných pozic. V druhém tahu je celkem 22 možných pozic, a z těchto pozic je ještě možných dalších 18 možností (sestrojte si strom hry). Protože některé pozice se opakují a jiné jsou symetrické, budeme raději kreslit reprezentanty zajímavých postavení, tj. v prvním tahu tři možnosti ,  a , atd. Situaci si ještě můžeme ulehčit, budeme-li zakreslovat pouze pole, kam ještě můžeme při tahu položit kostku domina, tj. z pozice  prvním tahem lze získat pouze pozice: ,  a  . Stejné pozice nebudeme kreslit vícekrát a tak postupně získáme *graf hry.*

Analýzou hry dostaneme, že hra je $\mathcal{N}$. Otočená hra je naopak $\mathcal{P}$ hra. Vyhrávajícím tahem v této hře je tah rozdělení na $=$.

Úloha: Zjistěte u nějakých jednoduchých pozic, zda se jedna o $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$ pozici. Např. , , , , , , , . Všechny pozice se 4 nebo 5 čtverečky, např. , nebo . Pokuste se vyslovit nějaké obecnější věty pro pravoúhelníky.

Pozice $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ můžeme také určit pomocí Grundyových hodnot. Grundyova posloupnost hry Cram je rekurzivně definována jako $\mathcal{G}_{\text{Cram}}: C \to \mathbb{N}$, kde množina C je množina všech pozic ve hře Cram a množina $\mathbb{N}$ je množina všech nezáporných celých čísel. $\mathcal{G}_{\text{Cram}}$ je definována takto: $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\cdot) = 0$ (když nejde položit kostku domina) a pro každou pozici X ve hře Cram je:

$$\mathcal{G}_{\text{Cram}}(X) = \min(\mathbb{N} \setminus \{\mathcal{G}_{\text{Cram}}(Y_1), \mathcal{G}_{\text{Cram}}(Y_2), \ldots, \mathcal{G}_{\text{Cram}}(Y_k)\}),$$

kde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ jsou všechny možné pozice, které je možné dosáhnout jedním tahem z pozice X.

Příklad: $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 0$; $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = \mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = \cdots = 0$. $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 1$ (jedním tahem se dostaneme do hry 0). $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 1$, protože jedním tahem se dostaneme do pozice (hry) , která má $\mathcal{G}_{\text{Cram}}$ hodnotu 0. $= -2$, prvním tahem se dostaneme do her , a , které mají hodnotu -1 a 0. I $\mathcal{G}_{\text{Cram}}$ hodnota hry $= 2$. $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 0$.

Úloha: Určete $\mathcal{G}_{\text{Cram}}$ hodnoty těchto pozic ve hře Cram: , , , , , , , , , , .

Jiným příkladem jsou pozice: $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 0$, $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 1$, $\mathcal{G}_{\text{Cram}}(\ ) = 1$, atd.

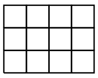
Hra Dominování se liší od hry Cram tak, že nějaké pozice mohou být dostupné jednomu z hráčů, ale druhému ne. Například pozice a , nebo pozice a jsou stejné pozice, pozice a jsou různé.

Úloha: Hrajte hru Dominování v pozicích , . Sestrojte grafy a proveďte analýzu.

Tak jako ale u předcházející her, můžeme sestrojovat graf hry a strom hry pro oba hráče, vždy ale s vyznačením příslušného hráče (dostupné pozice pro levého a pravého hráče zvlášť). Úmluvou je dáno, že levý hráč pokládá kostky domina vertikálně a pravý hráč horizontálně. V grafech tahy levého se vždy kreslí modrou barvou (bLue) a tahy pravého červenou barvou (Red).

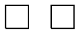
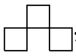
Výsledné třídy (výsledky) ve hrách (pozicích) v partyzánských her:

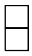
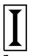
Fazy	$\mathcal{N}$	$\rightsquigarrow 1$
Nulové	$\mathcal{P}$	$\rightsquigarrow 2$
Kladná	$\mathcal{L}$	$\rightsquigarrow L$
Záporná	$\mathcal{R}$	$\rightsquigarrow R$

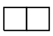
Například hra  je záporná.

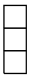
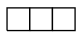
Hry a čísla

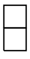
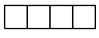
Tak jako v případě nestranných her, můžeme přiřazovat hodnoty pozicím v partyzánských hrách. Ohodnocení pozic nám pomůže ve hře najít vyhrávající strategii. Ukážeme, jak přiřazovat hodnoty ve hře Dominování, ale obecný princip je aplikovatelný na ostatní hry. Nejdříve některé pozice ohodnotíme obvyklými čísly, později budeme potřebovat i jiná čísla.

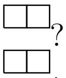
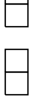
Nejdříve vyšetříme pozici, ve které není možný žádný tah. Takové (nulové) pozici přiřadíme symbol 0. Z této pozice žádný první hráč nemá vyhrávající strategii, naopak, v této hře existuje vyhrávající strategie pro II. hráče. Pozice, ve kterých existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče budeme nazývat nulové hry. Ve hře Dominování jsou to pozice například ,  nebo , atd.

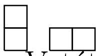
Ve hře Dominování v pozici  má vyhrávající strategii levý hráč. Levý hráč má jeden první tah do pozice  (0, nulové). Pravý hráč v této hře nemá pravidly povolený tah. Dohodneme se, že takovou hru budeme označovat $\{0\mid\}$. V levé části píšeme možné tahy levého hráče, a do pravé části zapíšeme možné tahy pravého hráče. Levý hráč má v této pozici výhodu jednoho tahu a proto hodnotu hry $\{0\mid\}$ označíme 1.

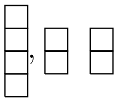
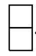
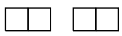
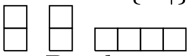
Pozici  označíme -1. V této pozici existuje vyhrávající strategie pro pravého hráče, a nezáleží na tom, jak zahraje levý hráč. Hodnota této hry je $\{\mid 0\} = -1$, protože pouze pravý hráč může táhnout do hry o hodnotě 0.

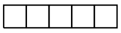
Použijeme-li stejné argumenty, ohodnotíme také hry  $= 1$ a  $= -1$.

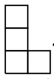
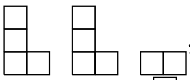
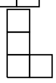
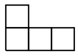
Analyzujme situaci  a hledejme její hodnotu. Levý hráč má na výběr dva možné tahy, zahrát do hry  nebo do hry . Hodnoty těchto her jsou 1 a 0. Hru  označíme $\{0, 1\mid\}$, resp. 2 (výhoda pro levého dvou tahů). Pravý hráč v této hře nemá pravidly povolený tah. Analogicky pozice  $= \{\mid 0, -1\} = -2$ (pravý hráč má výhodu dvou tahů).

Co můžeme říct o pozici ? V této pozici pravý hráč má také výhodu dvou tahů, levý hráč nemůže táhnout. Označíme tuto hru $\{\mid -1, -1\} = \{\mid -1\} = -2$. Použijeme-li sčítání her, dostáváme $-1 + (-1) = -2$. Podobně pozice  má hodnotu $\{1, 1\mid\} = \{1\mid\} = 2$.

Hru  zapíšeme $\{-1 \mid 1\}$. Levý hráč může zahrát do hry o hodnotě -1 a pravý hráč do 1. V této hře existuje vyhrávající strategie pro II. hráče a proto tuto hru označíme také 0. První hráč zahraje svůj tah a prohraje. Podíváme-li se ještě jednou na výchozí pozici, můžeme ji také označit $+1 + (-1) = 0$, protože pozice odpovídají 1 a -1.

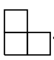
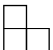
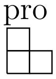
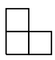
Pozice  umožňují levému dostat se jedním tahem do pozice . Proto i tyto pozice budeme značit $\{1 \mid\} = 2$. Podobně pozice  $= -2$. Uvědomte si, že například pozice  je pozice $2 + (-2) = 0$ a v této hře existuje vyhrávající strategie pro II. hráče. Pro hru tedy dostaneme $2 = \{1, 1 \mid\} = \{1, 0 \mid\}$. A podobně $-2 = \{\mid -1, -1\} = \{\mid -1, 0\}$.

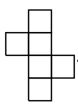
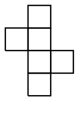
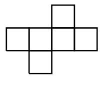
Hru  zapíšeme jako $\{\mid -2, -2, -1\}$ a označíme ji symbolem -3. Otočenou hru označíme $\{2, 2, 1 \mid\} = 3$.

Vyšetříme ještě pozici . Možnosti tahů hráčů jsou $\{-1, 0 \mid 1\}$. Otázkou je, jaké číslo přiřadíme této hře. Jistě je v této hře levý ve výhodě (hra bude kladná). Vyšetříme-li hru , zjistíme, že hra je nulová (existuje vyhrávající strategie pro II. hráče). Proto hře  přiřadíme hodnotu 1/2. (Protože $1/2 + 1/2 + (-1) = 0$.) Hodnotu hry můžeme také zapsat $1/2 = \{-1, 0 \mid 1\}$. Podobně hodnota hry  zapíšeme jako $\{1 \mid 0, -1\}$ a přiřadíme ji hodnotu $-1/2$.

Obecně: Budeme-li v pozici G a možné tahy levého jsou do her $H_1, H_2, \ldots, H_m$, možnosti tahů pravého budou třeba $K_1, K_2, \ldots, K_n$ a všechny hodnoty $H_1, H_2, \ldots, H_m$,$K_1, K_2, \ldots, K_n$ jsou čísla (hodnoty pozic), budeme psát $G = \{H_1, H_2, \ldots, H_m \mid K_1, K_2, \ldots, K_n\}$. Může se stát, že také nějaká jiná hra G' má stejnou hodnotu $\{H_1, H_2, \ldots, H_m \mid K_1, K_2, \ldots, K_n\}$.

1. Každou $\mathcal{P}$ pozici označíme znakem 0.
2. Každou $\mathcal{L}$ pozici označíme kladným číslem, pokud hodnota hry bude číslo.
3. Každou $\mathcal{R}$ pozici přiřadíme záporné číslo, pokud je hře přiřazeno číslo. Obecně $\mathcal{L}$ a $\mathcal{R}$ pozice nemusí nutně přiřazovat hře čísla, ale informuje nás o tom, kdo ve hře vyhraje a zda je hra kladná, resp. záporná.
4. Pokud dvě pozice jsou opačné, jejich hodnota bude také opačná a jejich součtem vždy bude 0 ($\mathcal{P}$ pozice, existuje vyhrávající strategie pro II. hráče).

Uvažujme pozici . Tato pozice je $\mathcal{N}$ pozice, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Pokud první hráč v této hře zahraje, dostane se do hry , jejíž hodnota je 0 (nulová hra). Tedy hru  zapíšeme jako $\{0 \mid 0\}$ a přiřadíme ji (nadreálnou) hodnotu $*$. Této hře nemůžeme přiřadit hodnotu 0, protože ve hře $*$ existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Stručně budeme říkat, že hra $\{0 \mid 0\}$ má hodnotu $*$ (star, hvězdička). Pozice  +  je $\mathcal{N}$ pozice, tedy $* + * = 0$.

Budeme ještě analyzovat pozici (hru) . Tato hra je $\mathcal{L}$. Možnosti tahů zapíšeme jako $\{0, * \mid *\}$ a hru označíme $\uparrow$. Hra  má hodnotu $\uparrow$. Opačná hra  má hodnotu

$\{* \mid 0, *\}$. Tuto hodnotu budeme označovat $\downarrow$, a platí $\uparrow + \downarrow = 0$.

Obecně hrám typu $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ přiřazujeme jejich (nadreálnou) hodnotu tvaru

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_m \mid K_1, K_2, \ldots, K_n\},$$

kde H_i a K_i mají všechny také (nadreálnou) hodnotu. Nadreálná hodnota nemusí být obvyklé číslo. Pozice mohou být kladné, nebo záporné. Například ve hře označené $*$ existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Hra může být kladná (např. $\uparrow$), záporná (např. $\downarrow$). Různé hry mohou mít stejnou (nadreálnou) hodnotu.

Úloha: Řešte hru DOMINOVÁNÍ na šachovnicích 3×3, 4×4, 6×4 nebo 6×6.