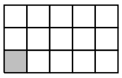
# 1 Příklady her – pravidla

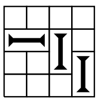
Hra Vybírání kamenů. Na hromádce je několik kamenů. Dva hráči střídavě odebírají jeden nebo dva kameny. Hráč, který odebere poslední kámen vyhrál.

Hromádky. Na počátku hry je několik hromádek kamenů. Dva hráči střídavě odebírají kameny z hromádek, v jednom tahu si hráč zvolí hromádku a z ní odebere nenulový počet kamenů. Poslední hráč (na hromádkách již nejsou kameny) vyhrává.

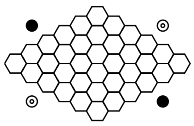
Chomp! Hraje se na tabulce čokolády. Políčko $a1$ je otrávené. V každém tahu si hráč vybere jedno políčko a sní toto políčko a všechna políčka nad a vpravo. Hráč, který je donucen sníst otrávené políčko, prohrál. Typická pozice je třeba tato:



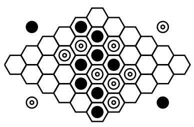
Hra Domino se hraje na čtvercové síti $m \times n$ políček. Hráči střídavě pokládají kostky domina, levý hráč svisle $2 \times 1$ a pravý vodorovně $1 \times 2$. Hráč, který nemůže svou kostku umístit, prohrál. Typická pozice po několika tazích je třeba



Criss–Cross, křižování. Hra je určena pro dva hráče. Levý a pravý hrají na hexagonální šachovnici jako na obrázku:



Střídají se v tazích a v každém tahu pokládají své kameny na prázdná pole. Po několika tazích hra může vypadat takto:



První hráč, který spojí cestou své dvě protilehlé strany hrací plochy, vyhrál.

Některé další deskové hry lze nalézt na http://www.deskovehry.info/pravidla/seznam.php

# 2 Stromy her

Hry připouštějí výsledky výhra, prohra a remíza (ozn. WLD). Jsou to hry deterministické (bez náhody), které hrají dva hráči, levý a pravý. Hráči se v tazích střídají. a po konečně mnoha tazích hra skončí s jedním možným výsledkem. Výsledek pro každého z hráčů může být výhra, prohra a nebo remíza (pat). Příklady takových her jsou dáma nebo šach.

Nakreslit graf hry je jedna z možností jak vizualizovat hru. Grafem je strom, ve kterém každý z uzlů označuje pozici ve hře, dolní uzel označuje počáteční pozici. Každý tah z pozice do nové pozice je označen hranou (spojnicí) grafů, která je označena $L$ nebo $R$ podle toho, který z hráčů je na tahu z dané pozice. Každá koncová pozice (pupen) je označena $\rightsquigarrow L$(vyhraje levý), $\rightsquigarrow R$(vyhraje pravý) nebo $D$ (pat, remíza). Každá pozice $H$ hry $G$ je opět hra. Každé pozici odpovídá podgraf stromu hry $G$. Výška stromu (patro) je maximální počet tahů od začátku do konce (ve stromu $G$).

Strategie hráče je „rozhodnutí" v každém uzlu jaký udělá tah. Říkáme, že hráč má vyhrávající strategii, pokud ve hře vyhraje, a nezáleží na možných tazích soupeře.

**Věta 2.1** (Zermelova věta)**.** *Pro každou WLD hru, platí jedna z následujících podmínek*

1. *Levý hráč má vyhrávající strategii* ( $\rightsquigarrow L$)
2. *Pravý hráč má vyhrávající strategii* ( $\rightsquigarrow R$)
3. *Oba hráči mají patovou strategii* ($D$).

*Důkaz*: indukcí přes výšku stromu vynecháme. □

Řešení hry znamená určení podle Zermelovy věty, ke které třídě hra patří.

# 3 Kombinatorické hry

Kombinatorické hry jsou deterministické (bez náhodného prvku) hry, které hrají dva hráči, pravý a levý. Hráči se v tazích střídají a po konečně mnoha tazích hra skončí. Hráč na tahu, který nemůže táhnout, prohrál.

Nulová hra je hra, která nemá žádný tah. V této hře vyhraje druhý hráč, nezačínající. Hru označujeme 0. Nulové hry jsou hrami, ve kterých existuje vyhrávající strategie pro II. hráče.

Hru budeme nazývat nestrannou, pokud z každé pozice dovolené tahy obou hráčů jsou stejné.

Součet her: jsou-li $G$ a $H$ dvě hry, potom $G + H$ je nová kombinatorická hra, která se hraje simultálně. Tah spočívá ve výběru jedné z komponent a v ní hráč udělá svůj tah. Druhá hra zůstane nezměněna. Vítěz ve hře $G + H$ je hráč, který udělal poslední tah.

Poznamenejme, že takto definované sčítání je komutativní a asociativní.

*Pozorování:* Je-li $Z$ nulová hra a $G$ libovolná hra, potom hry $G$ a $G + Z$ mají stejného vítěze.
*Důkaz*: Je potřeba dokázat, že hry dopadnou stejně. Hráč ve hře uplatňuje svoji vyhrávající strategii, existuje-li taková. Jakmile hráč zahraje ve hře $Z$ druhý hráč odpoví optimálně také ve hře $Z$, kde existuje vyhrávající strategie pro II. hráče. □

**Definice 3.1.** Říkáme, že dvě hry $G, G'$ jsou ekvivalentní a píšeme $G = G'$, právě tehdy a jen tehdy, pokud pro libovolnou hru $H$ hry $G + H$ a $G' + H$ mají stejného vítěze.

Poznámka: Tato relace je symetrická tranzitivní a reflexivní. Jistě platí $G_1 = G_2$ a $H_1 = H_2 \Leftrightarrow H_1 + G_1 = H_1 + G_2 = H_2 + G_2$.

*Pozorování:* Jsou-li $G$ a $H$ kombinatorické hry a předpokládáme-li, že v $H$ existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, potom

1. $H = 0$
2. $G + H = G$.

*Důkaz*: Protože hry $K+H$ a $K+0$ mají stejného vítěze, platí také $H = 0$. Druhé tvrzení je důsledkem předcházející poznámky. □

# 4 Binární rozklad

*Pozorování*: platí $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$ pro každé nenulové přirozené číslo $n$.

*Důkaz*: Nechť $n = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$ a spočítáme $2n$. Dostaneme $2n = 2(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^k) = 2+2^2+2^3+\cdots+2^{k+1} = (2^{k+1}-1)+(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^k) = (2^{k+1}-1)+n$. Odečteme-li $n$, dostaneme požadovanou rovnost. □

**Úloha 4.1.** Předcházející pozorování dokažte matematickou indukcí a top-down indukcí.

**Definice 4.2.** (Binární rozklad) *Binárním rozkladem* nenulového přirozeného čísla $n$ rozumíme jeho vyjádření ve tvaru $n = 2^a + 2^b + \cdots + 2^z$, kde $a > b > \cdots > z$.

Například číslo 14 má rozklad $14 : 2 = 7(0), 7 : 2 = 3(1), 3 : 2 = 1(1), 1 : 2 = 0(1)$; $(1110)_2$, tj. $8+4+2$. Rozvoj čísla 14 dostaneme také tak, že postupně odečítáme největší mocninu dvou, nepřevyšující dané číslo. Například $14 = 8+6 = 8+4+2$ nebo $30 = 16+14 = 16+8+6 = 16+8+4+2$, atd. Prakticky například číslo 31 rozdělíme na $16+15$, 15 rozdělíme na $8+7$, atd. Pro číslo 31 to znamená, že $31 = 16+8+7$ atd.

**Věta 4.3.** *Každé přirozené číslo má právě jeden binární rozklad.*

*Důkaz*: Každé přirozené číslo 1) má binární rozklad, který 2) je jednoznačný. Z daného čísla odebereme nejvyšší mocninu dvou, dokud nedostaneme 0. mocninu. Tu samou mocninu můžeme odebrat nejvýše jednou, protože kdyby jsme nějakou mocninu $2^k$ odebrali dvakrát, dostali bychom $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, které jsme odebrali v předcházejícím kroku. Tedy každé přirozené číslo má nejméně jeden binární rozklad. Sporem dokážeme 2). Budeme-li mít dva rozklady téhož čísla, můžeme je od sebe odečíst a měli bychom dostat nulu. Protože tyto rozklady jsou různé, i jejich rozdíl musí být nenulový. Spor. □

# 5 Nim

Hra Nim je nejdůležitějším příkladem nestranných her nebo Grundyových her, her, ve kterých oba hráči mají vždy stejné možnosti tahů.

Na hromádce je $n$ kamenů. Dva hráči se střídají v tazích, mohou odebrat jeden nebo dva kameny dokud hromádka není prázdná. Koncová pozice (poslední tah) určí vítěze. Zkuste si hru zahrát třeba pro $n = 37$ a hráč, který odebere poslední kámen vyhrál (nebo druhá varianta prohrál). Hra pravděpodobně pochází z Číny (Fan–Tan) a analyzována byla na počátku minulého století.

Jinou známou variantou je Wythoffova hra. Hra je se na dvou hromádkách kamenů. Hráči se v tazích střídají. Hráč na tahu může odebrat z jedné hromádky libovolný (nenulový) počet kamenů (pouze z jedné), nebo současně z obou hromádek stejný počet kamenů. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává. Hra pravděpodobně pochází z Číny, kde se hraje jako vybírání kamenů (tsyan–shidzi). Hru znovu zavedl matematik Willem Abraham Wythoff (1865-1939), který její analýzu řešení publikoval již v roce 1907. Hra je známá také jako dáma na šachovnici, která může táhnout vlevo, nebo dolů, popřípadě po diagonále vlevo dolů. Hra skončí na poli $a1$ a hráč, který je na tahu prohrál, protože nemůže táhnout. Tato interpretace je pochází až z poloviny minulého století a umožnila některá další zobecnění této hry. Bez zajímavosti není, že v řešení hry jsou důležité tzv. bezpečné pozice, které závisí na tzv. *zlatém řezu*, řešení rovnice $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Asi nejznámější variantou hry je verze Marienbad, která se hraje s patnácti kameny, které jsou ve čtyřech hromádkách po $1, 3, 5$ a $7$ kamenech. Hráči se v tazích střídají. Hráč na tahu může odebrat libovolný počet kamenů, ale pouze z jedné hromádky. Hráč, který je donucen odebrat poslední kámen, prohrál (betlová varianta). Hra má název podle filmu Poslední rok v Mariánských Lázních. Hra se také hraje v normální variantě (poslední hráč vyhraje). V nedávné době mohli diváci hru vidět i v populárním seriálu Pevnost Boyard. Varianty hry Nim bývají často náplní olympiád a korespondečních seminářů aj.

Vítězná strategie je založena na dvojkové soustavě, v každém tahu je třeba zahrát tak, aby se soupeř dostal do nulové pozice ve které existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Nulové pozice jsou jsou pozicemi, ve kterých nim součet $\oplus$ na hromádkách je nulový. Po rozkladu počtu kamenů na jednotlivých hromádkách použijeme dvě jednoduchá pravidla: $2^p \oplus 2^p = 0$ a pro $p \neq q$ je $2^p \oplus 2^q = 2^p + 2^q$. Například pro hru v postavení $\textsc{Nim}[7, 5, 3]$ (tři hromádky se 7, 5 a 3 kameny) je rozklad $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, $5 = 2^2 + 2^1$ a $3 = 2^1 + 2^0$. Nim součet $7 \oplus 5 \oplus 3 = 1$ je nenulový.

Budeme uvažovat hru s odebíráním předmětů Nim, která se hraje s několika hromádkami kamenů.

Symbolem $\bullet n$ označíme hru Nim s jednou hromádkou s $n$ kameny. Například $\bullet 0$ je hra nulová (a tedy existuje vyhrávající strategie pro II. hráče), zatímco pro $n > 0$ je hra $\bullet n$ vyhrávající pro prvního hráče (strategie je jednoduchá, stačí v prvním tahu odebrat všechny kameny). Použijeme-li náš disjunktní součet her, nalezneme $\bullet n_1 + \bullet n_2 + \cdots + \bullet n_k$, ve hře Nim na více hromádkách s $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kameny. Tuto pozici také označujeme také $\textsc{Nim}[n_1, n_2, \ldots, n_k]$.

*Příklad*: $\bullet 3 + \bullet 6 = \{\bullet 2 + \bullet 6, \bullet 1 + \bullet 6, \bullet 0 + \bullet 6, \bullet 3 + \bullet 5, \bullet 3 + \bullet 4, \bullet 3 + \bullet 3, \bullet 3 + \bullet 2, \bullet 3 + \bullet 1, \bullet 3 + \bullet 0\} = \{\bullet 4, \bullet 7, \bullet 6, \bullet 6, \bullet 7, \bullet 0, \bullet 1, \bullet 2, \bullet 3\} = \bullet 5$

Pro analyzování her Nim je klíčové každou hromádku rozdělit na menší části podle binárního rozkladu. Například $\textsc{Nim}[14]$ lze rozdělit na $\textsc{Nim}[8, 4, 2]$, resp. $14 = 8 + 4 + 2$.

Pozice $\text{NIM}[n_1, n_2, \ldots, n_k]$, tj. $\bullet n_1 + \bullet n_2 + \cdots + \bullet n_k$, je *vyrovnaná*, jestliže pro každou mocninu 2 (označíme ji $2^m$) v rozdělení $n_i$ podle binárních rozkladů je $2^m$ sudý počet.

Hra NIM patří ke hrám s úplnou kombinatorickou analýzou. Typická pozice ve hře NIM vypadá takto ○○○ ○○○○○ ○○○○○○○○. Hra se hraje s několika hromádkami (řádky) s několika kameny. Typická pozice je třeba $\text{NIM}[3, 5, 8]$. Při každém tahu si hráč může vybrat libovolný řádek (hromádku) a z něj odebrat (nenulový) počet kamenů. S odebranými kameny se již nehraje. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Každá nenulová počáteční pozice má vyhrávající strategii pro prvního hráče, protože hráč na tahu může odebrat celou hromádku. Je-li hromádka prázdná, existuje vyhrávající strategie pro II. hráče. Jak je to se dvěma hromádkami? Zde záleží na tom, zda hromádky jsou stejné či nikoliv. Pokud obě hromádky obsahují stejný počet kamenů, snadno uvidíme, že existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, protože hráč na tahu může opakovat tah soupeře ve druhé hromádce. Tato strategie se nazývá *kradení strategie.* Hra (indukcí) musí skončit po konečně mnoha tazích. Naopak, obsahuje-li hra dvě nestejné hromádky, existuje vyhrávající strategie pro I. hráče, protože hráč svým tahem může dorovnat hromádky na stejný počet a použít předcházející strategii.

Kompletní strategii hry NIM objevil harwardský geometr Charles Bouton v roce 1901. Jeho řešení se poměrně snadno popíše. Pro dvě nezáporná celá čísla $a, b$ *nim součet* $a \oplus b$ dostaneme následujícím výpočtem: (1) Prvně obě dvě čísla vyjádříme ve dvojkové soustavě, (2) a potom tato dvě čísla sečteme bez přenosu do vyšších řádů. Příklady jsme již uvedli a čtenář může ověřit např. rovnost $29 \oplus 21 \oplus 11 = 3$.

Je-li $G$ pozice ve hře NIM s hromádkami $a_1, a_2, \ldots, a_k$ kamenů, potom *nim hodnota* je definována jako
$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k.$$
Pozici $G$ nazveme nulovou, je-li její hodnota nula. Strategii ve hře určuje Boutonova věta:

**Věta 5.1** (Bouton)**.** *Nechť $G$ je* NIM *pozice.*

1. *Je-li $G$ nulová pozice, potom každý tah z této pozice vede na nenulovou pozici.*
2. *Není-li $G$ nulová pozice, potom existuje takový tah, který vede do nulové pozice.*

Tedy je-li $G$ nulová pozice, potom existuje vyhrávající strategie pro II. hráče taková, že druhý hráč může zahrát do nulové pozice. První hráč svým tahem poruší vnitřní symetrii postavení. Protože ve hře každým tahem zmenšíme počet kamenů, hra skončí po konečně mnoha tazích a druhý hráč bude mít poslední tah (normální varianta). Naopak, je-li $G$ nenulová pozice, potom první hráč si může zabezpečit vítězství tak, že zatáhne do nulové pozice.

Například předpokládejme, že $G$ má tři hromádky s počty kamenů $29, 21, 11$. Již dříve jsme spočetli, že jejich nim součet je 3. Tato pozice je tedy nenulová a tedy nutně v této hře má vyhrávající strategii první hráč. Není příliš obtížné nahlédnout, že stačí odebrat tři kameny z poslední hromádky o 11 kamenech. Potom bude $29 \oplus 21 \oplus 8 = 0$, tedy výsledná pozice bude nulová.

*Důkaz*: (Bouton, 1901) Nejdříve předpokládejme, $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0$, a soustředíme se na typický tah $a_1 \to a_1'$. Nutně tedy $a_1 \neq a_1'$ a

$$a_1' \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k \neq a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0.$$

Tah tedy vede do nenulové pozice.

Naopak: Předpokládejme, že

$$x = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k \neq 0.$$

Vezměme cifru nejvyššího řádu čísla $x$ (ve dvojkové soustavě). Nejméně jedno $a_i$ musí mít tuto cifru rovnu jedné. Bez ohledu na obecnost to může být $a_1$. Položíme $x \oplus a_1 = a_1'$. Nutně $a_1' < a_1$. Potom ale

$$a_1' \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = x \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = x \oplus x = 0.$$

□

Každá pozice ve hře Nim má svůj výsledek: $G$ je nulová hra a druhý hráč si může vynutit vítězství bez ohledu na možné tahy soupeře, nebo první hráč si může vynutit vítězství. Tato úvaha nás vede na rozdělení všech her Nim na dvě disjunktní třídy (množiny). Podotkněme, že pozice dalších her mohou mít různé výsledkové třídy. Zatímco je snadné dokázat, že takové třídy existují (a my to budeme demonstrovat v této knize na mnoha příkladech), současně vypočítat, ke které třídě hra patří bývá obtížné. Jedním z cílů teorie kombinatorických her je určení, k jakému typu hra patří.

Poznamenejme ještě, že Boutonova věta se neaplikuje pouze na jednu počáteční pozici, ale na všechny možné pozice ve hře Nim, s libovolně velkými hromádkami. Říkáme také, že hra Nim je řešitelná a míníme tím, že existuje algoritmus výpočtu výsledkové třídy libovolné pozice.

Buď dále $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nezáporná celá čísla. Každé číslo vyjádříme ve dvojkové soustavě. *Nim součet* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se označuje $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k$. Nim součet získáme tak, že zapíšeme pouze liché mocniny v binárním rozkladu čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Například $(11001)_2 \oplus (1001)_2 = (10000)_2$, nebo $(11001)_2 \oplus (10111)_2 \oplus (111)_2 = (1001)_2$.

**Věta 5.2.** *Nechť $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jsou nezáporná celá čísla. Potom*

$$\bullet n_1 + \bullet n_2 + \cdots + \bullet n_k = \bullet(n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k).$$

*Důkaz*: Uvažujme nyní $\bullet n_1 + \bullet n_2 + \cdots + \bullet n_k + \bullet(n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k)$. Tato hra je vyrovnaná a tedy existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Tedy

$$\bullet n_1 + \bullet n_2 + \cdots + \bullet n_k + \bullet(n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k) = 0.$$

Přičteme-li k oběma stranám rovnosti $\bullet(n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k)$, dostaneme uvedené tvrzení.

□

## 5.1 Kradení strategie

V některých hrách můžeme ukázat, že jeden z hráčů má vyhrávající strategii bez explicitního nalezení takových tahů (strategy stealing argument). Metoda spočívá v použití strategie druhého hráče. Může se použít v případě, že budeme sporem předpokládat, že druhý hráč má vyhrávající strategii a nějaký tah udělá, potom, pokud může první hráč tento tah udělat, převezme strategii druhého hráče (spor).

**Úloha 5.3.** Který z hráčů má vyhrávající strategii ve hře CHOMP?

# 6 Sprague-Grundyova věta

Hra se nazývá *nestrannou*, pokud v každé pozici oba hráči mají na výběr stejnou množinu tahů.

Pro každou pozici $H$ v nestranné hře $G$ je dána (pravidly) nějaká množina možných tahů $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$. Budeme také psát, že $H = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$. Samotná hra $G$ je pak $G = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$.

**Věta 6.1** (Princip mex). *Nechť $G = \{\bullet n_1, \bullet n_2, \ldots, \bullet n_k\}$ a nechť $m$ je nejmenší nezáporné číslo, které není zastoupené v množině $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Potom $G = \bullet m$.*

*Důkaz*: □

**Úloha 6.2.** Dokažte!

**Věta 6.3** (Sprague–Grundyova věta). *Pro každou konečnou nestrannou hru $G$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $G = \bullet m$.*

*Důkaz*: □

**Úloha 6.4.** Dokažte!

# 7 Nadreálná čísla

Nyní budeme definovat zajímavou třídu her, kterou nazveme *nadreálná čísla.* Tato třída bude definována rekurzivně po dnech.

**0tý den** vznikne číslo 0. Číslo nula je vytvořeno ze dvou prázdných množin $0 = (\varnothing; \varnothing)$, které budeme psát také jako $\{|\}$.

**Den** $n+1$: Tento den vzniknou opět všechna čísla, která vznikla v den $0, 1, \ldots n$. Všechna čísla slouží pro vytvoření dvojic $(L, R)$ tak, že žádný prvek levé části $L$ není větší ani roven žádnému prvku z pravé části $R$. Množiny $L$ a $R$ mohou být i prázdné. Bude-li třeba $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ a $R = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$, budeme odpovídající číslo také zapisovat jako $\{x_1, x_2, \ldots, x_k \mid y_1, y_2, \ldots, y_l\}$. V tento den vzniknou nová čísla dvou tvarů: Jsou-li obě množiny $L$ a $R$ neprázdné, potom vznikne polovina maximálního prvku levé části a minimálního prvku pravé části. Pokud $R$ je prázdná množina, potom vznikne nové číslo nejmenší celé nezáporné číslo větší než čísla z $L$, a analogicky, bude-li $L$ prázdná množina dostaneme největší celé záporné číslo menší než čísla v množině $R$. Všechna čísla jsou vytvořena podle těchto pravidel. Např. $1 = \{0 \mid\}$, $-1 = \{\mid 0\}$, $2 = \{-1, 0, 1 \mid\} = \{0, 1 \mid\} = \{1 \mid\}$, $\{0 \mid 1\} = 1/2$, $\{1 \mid 3\}$, $\{1 \mid 2\} = 3/2$, atd.

**Úloha 7.1.** Sestrojte si několik prvních čísel do dne 3, zakreslujte je do číselné osy nebo sestrojte graf vzniku čísel (strom nadreálných čísel).

Čísla, která vzniknou konečný den, jsou tzv. dyadická racionální čísla, tj. čísla tvaru $m/2^n$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. Množinu dyadických čísel označujeme $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Posloupnost přirozených čísel podle dnů vytvoření nadreálných čísel můžeme přirozeným způsobem rozšířit na tzv. *ordinální čísla.* Tak dostaneme číselnou posloupnost dnů

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots, \omega^2, \dots$$

Symbolem $\omega$ jsme označili nejmenší nekonečné ordinální číslo větší než všechna přirozená čísla. Nadreálná čísla samozřejmě budou vznikat i v nekonečných dnech.

Dne $\omega$ vzniknou nejen chybějící racionální čísla, ale také všechna reálná čísla. To je způsobeno tím, že každé reálné (racionální) číslo můžeme charakterizovat posloupnostmi (horní a dolní) dyadických čísel. (Analogie desítkové soustavy.)

Dne $\omega$ ale vzniknou i další zajímavá čísla. Na okraji vzniknou nekonečná čísla $\omega$ a $-\omega$. Ale také kladné číslo $1/\omega$, které je větší než libovolné kladné dyadické číslo.

Čísla se reprodukují do dalších dnů. Každý interval $(x; y)$ obsahuje nejjednodušší číslo, tj. číslo, které vzniklo nejdříve. Toto číslo je jednoznačné.

**Úloha 7.2.** Dokažte!

---

[2hs03RMF actual 0devos.tex, 26/01/15, 18:53]