1

O číslech a hrách

1.1 Úvod

Na otázku co jsou čísla není jednoduchá odpověď. Nejčastější možnost je použít teorii množin, model Peanovy aritmetiky, větou o vnoření pologrupy do grupy sestrojit celá a racionální čísla a metodou řezů vytvořit reálná čísla. My se budeme věnovat snazší cestě, kterou prozkoumali Berlekamp, Conway, Guy a Knuth (viz lit.). Sestrojíme nadreálná čísla, která budou zahrnovat mj. i běžné číselné struktury.

Autoři v publikacích [OGAN] a [WW] vytvářejí čísla jako jednoduché pozice v některých hrách. Vytvářejí bohatou teorii, ve které jsou obsažena nejenom přirozená, celá, racionální a reálná čísla, ale i neočekávané číselné obory, např. ordinální čísla, zobecnělá celá čísla a pod. Vytvářena jsou i nadreálná čísla, systematicky studované v noveletě [SN].

Pomocí hraní her a jejich analýze různých pozic, získáme číselné obory $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$ stejně jako další komplikovanější obory. A nejenom to, hraní her nám pomůže definovat binární operace (sčítání, odčítání, násobení,...), které budou odpovídat běžným operacím nad těmito číselnými obory.

Budeme se především opírat o hru Hackenstring, která bude reprezentovat matematické (kombinatorické) hry. Pomocí této hry vytvoříme $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a další číselné obory. Tato hra se hodí jako model nadreálných čísel.

Čemu se budeme především věnovat?

V kapitole 1.2 budeme definovat, co je to kombinatorická hra na rozdíl od nekombinatorických her. Zmíníme se o pravidlech hry, speciálně o Hackenstringu a pomocí hraní her vyšetříme běžné číselné struktury. Zavedeme sčítání, odčítání a také nulové hry. Budeme definovat celá čísla $\mathbb{Z}$ jako jednoduché pozice ve hře Hackenstring. Později vyšetříme i strukturu $\mathbb{Q}$. V této kapitole se soustředíme pouze na konečné hry.

V kapitole 1.3 se budeme věnovat dalším vlastnostem racionálních čísel. Dosáhneme toho, jak hře HACKENSTRING přiřadit hodnotu pomocí dvojkové soustavy a nejlepším tahům ve hře.

V kapitole 1.4 rozšíříme konečná dyadická čísla na nekonečná a tím získáme nadreálná čísla rozšířením předcházejících metod. Konečně vytvoříme také reálná čísla $\mathbb{R}$ a zmíníme se o dalších číslech (nekonečně malých a velkých).

Na rozdíl od klasické cesty vytvoření číselných oborů, metoda vytvoření nadreálných čísle je úžasně jednoduchá. Čísla budou pro nás znamenat pozice ve hře. Dostaneme tak hlubokou definici čísel jako pozic v jednoduchých kombinatorických hrách.

1.2 Kombinatorické hry

Tato kapitola bude věnována součtu kombinatorických her. Budeme přesně definovat, co je kombinatorická hra, definovat HACKENSTRING a pomocí hraní několika her odvodíme numerické (číselné) hodnoty různých pozic. Budeme definovat sčítání, odčítání a nulové hry. Konečně odvodíme celou množinu celých čísel $\mathbb{Z}$ a naznačíme vytváření racionálních čísel $\mathbb{Q}$, jakožto necelých čísel. V této kapitole se soustředíme na konečné hry.

Než-li začneme hrát kombinatorické hry, musíme vymezit, co to kombinatorická hra vlastně je, na rozdíl od jiných her. Nejlepší možností je vymezit pravidla, co to kombinatorická hra je. Tím je odlišíme od ostatních her. Následuje osm vlastností, které vymezí pojem kombinatorické hry. Tyto vlastnosti jsou

1. Hru hrají dva hráči.
2. V každé hře je několik pozic, zahrnující počáteční pozici. Počet pozic může být i nekonečný.
3. Pravidly hry jsou stanoveny možné tahy, které oba hráči mohou (popř. nemohou) udělat z každé pozice do libovolné následující pozice.
4. Hráči se v tazích střídají. Hráč nemůže udělat dva tahy po sobě bez toho, aby protihráč zahrál.
5. Hra je bez skrytých informací, oba hráči mají stejnou informaci o hře.
6. Ve hře nejsou náhodné tahy (nehází se kostkou, netahají se karty,...).
7. Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.
8. Hra se nemůže hrát do nekonečna. Má jednu (nebo více) koncových pozic. Hra může být i nekonečná, ale vždy skončí po konečně mnoha tazích dosažením koncové pozice.

Příklad 1.1. Pro demonstraci tohoto rámce her vybereme hru Hackenstring. Dostaneme celá čísla, sčítání, odčítání a nulové hry. Pravidla hry Hackenstring jsou relativně jednoduchá. Začíná se hrát na jednom řádku bíLých a čeRných kamenů. Hru hrají dva hráči, kteří se nazývají pan bíLý a pan čeRný. Hráči mají přiřazeny svou barvu. V každém tahu hráč vybere kámen své barvy, ten odebere spolu se všemi pravějšími kameny. Hráč na tahu, který nemůže odebrat svůj kámen (kámen své barvy), prohrál. S odebranými kameny se již nehraje. Hráči se v tazích střídají. Hráč, který dosáhl koncové pozice, vyhrál. Příkladem takové hry je třeba |○●. Začne-li Levý, odebere kámen své barvy a s ním i černý. Dostane se do hry | a vyhraje. Ve hře již nejsou žádné kameny. Hra se může hrát i na více řádcích.

Příklady několika počátečních pozic ve hře Hackenstring:

| |○ |○○● |○●○●●●○.

Pro danou počáteční pozici Hackenstringu jsou teoreticky možné pouze tři výsledky:

- $\rightsquigarrow$ *L* Hru vyhraje Levý hráč (bez ohledu na možné tahy pRavého hráče a kdo ve hře začíná). Takovou hru budeme nazývat kladnou.
- $\rightsquigarrow$ *R* Hru vyhraje pRavý hráč (bez ohledu na možné tahy Levého hráče a kdo ve hře začíná). Takovou hru budeme nazývat zápornou.
- $\rightsquigarrow$ 2 Hru vyhraje hráč, který ve hře nezačínal. Takovou hru budeme nazývat nulovou

Vždy předpokládáme, že oba hráči hrají své nejlepší tahy. Hru Hackenstring nemůže vyhrát první hráč.

Ve hrách |○, |○● vyhraje Levý, ve hře $\left|\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}\right.$, |●○○ vyhraje pRavý hráč, bez ohledu na možné tahy soupeře.

Definice 1.2. *Hru* Hackenstring *G, ve které vyhraje druhý hráč (hráč, který nezačíná), označujeme jako nulovou hru. Budeme také psát* $G = 0$ *nebo* $\rightsquigarrow 2$.

Příklad 1.3.

$$\Big|, \qquad \left|\begin{smallmatrix}\circ\\ \bullet\end{smallmatrix}\right., \qquad \left|\begin{smallmatrix}\bullet\bullet\\ \circ\circ\end{smallmatrix}\right., \qquad \left|\begin{smallmatrix}\circ\bullet\\ \bullet\circ\end{smallmatrix}\right., \qquad \dots$$

jsou nulové hry.

1.2.1 Aritmetika Hackenstringu

Označili jsme dva hráče Levý a pRavý, kteří hráli s bíLými a čeRnými kameny, definovali jsme kladnou a zápornou hru.

Definice 1.4. *Nechť* Hackenstring *je hra G. Hra, vyhraje-li Levý hráč, bez ohledu, kdo ve hře začíná, se nazývá kladná. (Oba hráči hrají optimálně, bez ohledu na možné tahy pRavého.) Píšeme také $G > 0$ a $\rightsquigarrow L$.*

Nechť Hackenstring *je hra G. Hra, vyhraje-li pRavý hráč, bez ohledu, kdo ve hře začíná, se nazývá záporná. (Oba hráči hrají optimálně, bez ohledu na možné tahy Levého.) Píšeme také $G < 0$ a $\rightsquigarrow R$.*

Například kladné hry jsou , . Zahrajte si také hru !

Definice 1.5. *Součet dvou her* Hackenstring *G a H je složená hra. Hráč může svůj tah udělat buď ve hře G nebo ve hře H. (Ne současně, druhá hra zůstane nedotčena). Tuto hru označujeme $G + H$.*

Hry vedle sebe, např. hru , chápeme jako součet $+$. Nebo $+$ a pod.

Celkem je jasné, že součtem dvou her Hackenstring je opět Hackenstring. Méně již je vidět, že tato operace je asociativní a komutativní.

Nyní budeme definovat opačnou hru:

Definice 1.6. *Opačnou hrou ke hře G je taková hra, kterou přidáme-li ke hře G, dostaneme nulovou, tj. je to hra H, pro kterou $G + H = 0$.*

Například $+$ $=$ $= 0$, $+$ $=$ $= 0$, $+$ $=$ $= 0$.

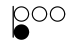
Z příkladu je vidět, že opačná hra není definována jednoznačně, stejně jako nulová hra. Je užitečná následující definice:

Definice 1.7. *1. Primárně nulová hra je hra, ve které žádný z hráčů nemůže táhnout. Takovou hru také nazýváme nulou. Označujeme 0.*

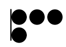
2. Primárně opačná hra, je hra po výměně Levého a pRavého hráče.

1.2.2 Vytváření celých čísel

Definovali jsme kladné hry ($G > 0$), záporné ($G < 0$) a nulové hry ($G = 0$). Dále sčítání a opačnou hru. Můžeme takovým hrám přiřazovatčíselné hodnoty (čísla)? Existuje velmi přirozená cesta, která nás povede na přirozené objevování dalších čísel.

Uvažujme třeba hru $= G > 0$. Je celkem jasné, že tato hraje kladná; Levý hráč má výhodu a vyhraje, bez ohledu na soupeřovy tahy a kdo v této hře začíná. O kolik tento hráč vyhraje? Levý hráč má na výběr 4 možné tahy, všechny jsou v první hře a pRavý nemůže tyto tahy ovlivnit. I pRavý má tahy, které nemůže Levý hráč ovlivnit. Pokud oba hráči budou hrát optimálně (což vždy předpokládáme), jistě neodeberou svůj nejlevější kámen. Hra se po dvou tazích dostane do postavení . Zde analýza hry je zcela analogická… Dostáváme se do jednodušší pozice a je vidět, že Levý hráč má výhodu dvou tahů.

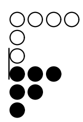
Nejjednodušší nenulovou hrou HACKENSTRING je |○. Tuto hru označíme 1, Levý hráč má výhodu jednoho tahu, $1 > 0$, $\rightsquigarrow L$. Analogicky hra |● $= -1 < 0$ a $\rightsquigarrow R$.

Hra $|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{n\times}$ bude mít hodnotu n, k ní (primárně) opačná $|\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n\times}$. Hra jednobarevný vláček: |●●●● =  =  $= -4$. Takže celá čísla jsou nadstrukturou přirozených čísel.

Nyní zavedeme nové zápisy, které budou hry popisovat bez obrázků.

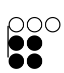
Způsob zápisu: Ve hře $G = n \in \mathbb{N}$ jsou-li levé možné tahy do pozic $a, b, c, \dots$ a pRavý může zahrát do pozic $d, e, f, \dots$, potom budeme také psát $G = \{a, b, c, \dots \mid d, e, f, \dots\} = n \in \mathbb{N}$.

Například: $G_1 = \{0, 1, 2, 3 \mid\}$, $G_2 = \{1 + 2, 2, 2 + 1, 2 \mid\}$ nebo $G_3 = \{1, 2, 3, 3 \mid\}$.

Nulová hra:  $= \{-4, -3, -2, -2, -1, -1 \mid 1, 1, 1, 2, 3\}$. V případě, že se numerické hodnoty na jedné straně opakují, budeme je psát jen jednou: $G_2 = \{3, 2 \mid\}$, $G_3 = \{1, 2, 3 \mid\}$. nebo $\{-4, -3, -2, -2, -1 \mid 1, 2, 3\}$.

Vzájemný vztah mezi tímto novým zápisem a hodnotou hry, který popisuje, nemusí být na první pohled zřejmý. Následující příklady, metody a návrhy definic učiní oprávnění pro tento zápis jasnější.

Metoda zjednodušování.
Použijeme-li náš výše zavedený způsob zápisu, hledejme $\max\{a, b, c, \dots\}$ a $\min\{d, e, f, \dots\}$. To znamená, že uvažujeme pouze největší prvek zleva a nejmenší prvek zprava. V herních termínech to znamená, že hledáme nejlepší možný tah Levého a pRavého.[1]

Příklad 1.8. Je-li $G =$  $= \{-2, -3, -4 \mid 0, 1, 0, 1\}$, potom také $G = \{-2 \mid 0\}$. Mezi -2 a 0 najdeme celé číslo. Takové číslo existuje a je pouze -1. Proto $G = -1$.

Věta 1.9. *Hru s hodnotou $k + 1$ píšeme jako $\{k \mid\}$. Hru s opačnou hodnotou píšeme jako $\{\mid -k\}$*

Uvažme, že |○ $= \{0 \mid\} = 1$, |○○ $= \{1 \mid\} = 2, \dots$ a $\{0, 1, 2, \dots, k \mid\} = k + 1$ atd.

[1] Úvahy platí pouze pro krátké hry. Extrémní hodnoty musí existovat.

Platí: $\{|\} = 0$, $\{k\,|\} = k + 1$, $\{|\,-k\} = -(k + 1)$, $\{-k\,|\} = 0$, $\{|\,k\} = 0$, $\{k - 1 \mid k + 1\} = k$, $\{-k \mid m\} = 0$ pro všechna $k, m \in \mathbb{Z}$, $k, m \geqslant 0$.

Až doposud jsme se zabývali řádky jedné barvy a konečné hry. Dostávali jsme celá čísla $\mathbb{Z}$. Později uvidíme, že zápis do závorek $\{\cdot \mid \cdot\}$ povede na další číselné struktury. Co očekáváme od řádků různých barev?

Hra $|\circ\bullet$ má jistě kladnou hodnotu, vyhraje Levý. Přirozenou otázkou je, jak moc je kladná tato hra?

Spočítejte ještě $|\circ\bullet + |\bullet$ a proveďte analýzu, dále také $|\circ\bullet + \left|\begin{array}{l}\circ\bullet\\ \bullet\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\circ\bullet\\ \circ\bullet\\ \bullet\end{array}\right. = 0$. Tedy má-li $|\circ\bullet$ číselnou hodnotu, nutně $|\circ\bullet = 1/2$. Píšeme $|\circ\bullet = \{0 \mid 1\}$.

Analogicky dostaneme $|\circ\bullet\bullet = 1/4$, protože $\left|\begin{array}{l}\circ\bullet\bullet\\ \circ\bullet\bullet\\ \bullet\circ\end{array}\right. = 0$. Píšeme $\{0 \mid 1/2\} = 1/4$, obecně $\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Obecně jak nalézt hodnotu hry s racionální hodnotou a jmenovatelem 2^n, $n \in \mathbb{N}$, nás informuje následující věta:

Věta 1.10.

$$|\circ\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n\times} = (1/2)^n.$$

Z těchto pozorování jsme schopni vytvořit libovolnou pozici v dyadických racionálních čísel následující metodou:

Pravidlo:

Hru s hodnotou $a/2^n$, $n, a \in \mathbb{Z}, a, n \geqslant 0$ dostaneme tak, že a krát opakujeme hru s hodnotou $1/2^n$.

Pravidlo:

Hodnotu $m + a/2^n$ získáme přidáním hodnoty m k $a/2^n$. Na počátku bude m bíLých kamenů a pokračujeme hrou s hodnotou $a/2^n$.

Definice 1.11. *Dyadické racionální číslo je tvaru $a/2^n$, kde $a, n \in \mathbb{Z}$.*

Jednoduché pravidlo, jak sestrojit hru s hodnotou $m + 1/2^n$, je následující:

Věta 1.12.

$$|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{m+1}\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n} = m + 1/2^n.$$

Příklad 1.13. Například $3\frac{1}{16} = 3 + \frac{1}{16}$ je $|\underbrace{\circ\circ\circ\circ}_{3+1}\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet}_{4}$.

Nyní jsme schopni sestrojovat $m + a/2^n$. Jak ale nalezneme další hodnoty racionálních čísel? Nebo dokonce reálných? Na tyto otázky se soustředíme v následující kapitole.

Naučili jsme se přiřazovat hodnoty celočíselným hrám pomocí různých pozic hry Hackenstring. Definovali jsme součet her a nulovou hru v rámci celých čísel $\mathbb{Z}$. Zavedli jsme jednoduché zápisy, které nám umožnili efektivně sestrojit hru s danou hodnotou. Soustředili jsme se na tzv. dyadická čísla $\mathbb{Z}[1/2]$.

V následující kapitole se soustředíme na konstrukci ostatních racionálních čísel $\mathbb{Q}$, kdy rozšíříme ideu o nekonečné hry a jejich binární reprezentaci. Uvidíme, že tato metoda povede dokonce na ostatní reálná čísla $\mathbb{R}$.

Zavedeme nové metody výpočtů her Hackenstring a tím získáme systematický pohled na metody vytváření her s danou hodnotou pomocí jejich hodnot v binární reprezentaci.

1.3 Kombinatorické hry a jak je hrát

Naše předcházející metody výpočtů hodnot pozic Hackenstringu nebyly příliš analytické, nebyly ani příliš praktické pro hry s mnoha kameny. Budeme potřebovat více systematické způsoby výpočtu hodnot her Hackenstring. Nalezneme novou metodu, kde využijeme větu o nejjednodušším prvku. Později se podíváme (po pochopení těchto dvou metod) na analýzu pozic her umožňující hodnoty binární reprezentace. S touto metodou budeme schopni vytvořit celou množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Binární reprezentace nám umožní nalézt hry s danou racionální hodnotou (tj. pozici hry). Ale i naopak k dané herní pozici nalézt její hodnotu. To vše využijeme později, když přejdeme na nekonečné binární reprezentace.

Jak najít nejlepší (optimální) tah ve hře $G \equiv \{G^L \mid G^R\}$? G^L reprezentuje množinu všech možných tahů, které může udělat Levý hráč ze současné pozice jedním tahem. Analogicky definujeme G^R.

Příklad 1.14. Hra $G =$  má $G^L = \{-1, 0\}$ a $G^R = \{1, 1\frac{1}{2}\}$.

Hra $G_2 =$  má $G_2^L = \{0, 1, 2, 3\}$ a $G_2^R = \{4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{8}\}$. $\max G_2^L = 3$ a $\min G_2^R = 3\frac{1}{8}$

Věta 1.15. *Hra, která má vyjádření* $\{\frac{a-1}{2^n} \mid \frac{a+1}{2^n}\}$, *má hodnotu* $\frac{a}{2^n}$, *kde* $n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 1.16. $G = \{1 \mid 3\}$ má hodnotu 2, zde $a = 2$ a $n = 0$.

Hra $G_2 = \{\frac{1}{2} \mid 1\} = \{\frac{2}{4} \mid \frac{4}{4}\}$ má hodnotu $\frac{3}{4}$, zde $a = 3, n = 2$.

Zatím víme, že v $\left\{G^L \mid G^R\right\}$ je zajímavé $\max G^L$ a $\min G^R$. Musíme také umět určit hodnoty hry $\left\{\max G^L \mid \min G^R\right\}$.

Věta 1.17 (Pravidlo zjednodušení). *Mezi a, b, pro které je $\{a \mid b\} = n$, je takové n, pro které je $a < n < b$ a n je mezi a, b nejjednodušší.*

Obsahem věty je „jednodušší číslo“. Dříve vytvořené číslo je jednodušší. Čísla jsou budována postupně. Nejjednodušší číslo je $0 = \{|\}$. Číslo je jednodušší, pokud je vytvořeno dříve. Další nejjednodušší čísla jsou $1 = \{0 \mid\}$ a $-1 = \{\mid 0\}$ a jejich možnosti (tahů) jsou vytvořeny z jednoduššího čísla 0.

Následující jednodušší čísla jsou vytvářena analogicky pomocí předcházejících čísel $-1, 0, 1$. Jsou to $2 = \{1 \mid\}$, $1/2 = \{0 \mid 1\}$, $-1/2 = \{-1 \mid 0\}$ a $-2 = \{\mid -1\}$. Následující jednoduchá čísla jsou

$$-3, \qquad -1\frac{1}{2}, \qquad -\frac{3}{4}, \qquad -\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{3}{4}, \qquad 1\frac{1}{2}, \qquad 3.$$

atd. Obecněji: Čísla, která mají za možnosti dříve vytvořená čísla. V $n$té generaci vzniká 2^{n-1} jednoduchých čísel. Vznikají takto celá čísla a dyadická racionální čísla. Přirozeně se naskýtá otázka, jak je to s ostatními čísly, tj. s racionálními (nedyadickými) čísly? Jak budeme analyzovat nekonečné hry? Uvažme, že pro nekonečné hry nemusí existovat min nebo max. Konečně existují i hry s nečíselnou hodnotou?

Metoda, která nám pomůže dát odpověď na těchto pár otázek, je metoda binární reprezentace, na kterou se nyní soustředíme.

Nyní na chvíli zapomeneme na zápis čísel pomocí dvou závorek $\{\cdot \mid \cdot\}$ a budeme se zabývat jednořádkovému zápisu možných pozic ve hře Hackenstring. S minimem znalostí tak budeme schopni vypočítat hodnoty takových Hackenstringu pomocí dvojkové soustavy. Tato metoda je extrémně užitečná i pro analýzu některých nekonečných her, kde se nám podaří nalézt pravidlo a umožní nám sestrojit herní hodnoty všech racionálních čísel. Pomocí binární reprezentace a této metody bude užitečné nejen pro vyšetřování racionálních čísel $\mathbb{Q}$, ale umožní nám počítat i některá neracionální reálná čísla (reálné hodnoty těchto her). Před tím než budeme pokračovat v popisu této metody, zvolíme označování

Pomocí tohoto pravidla jsme schopni výpočtu daných hodnot hry Hackenstringu na jednom řádku. Pro Hackenstring vytvoříme jednořádkový zápis pozice. Hodnoty vyjádříme pomocí zlomků nebo jako decimální hodnoty s určením opakovací sekvence (pravidla pokračování).

Nyní začneme s tím, že budeme vypočítávat hodnoty daných jednořádkových her:

Pravidlo:

Pravidlo popíšeme pomocí několika kroků takto:

1. Mějme nějaký jednořádkový HACKENSTRING a jeho pozici. Jednotlivé kameny budeme po řadě kódovat zleva do prava pomocí písmen L a R. Každý bíLý kámen zakódujeme L a čeRný kámen R. Například hodnotu hry $1\frac{3}{8}$ zakódujeme jako $[LLRRL]$, protože hra je v postavení |○○●●○.
2. První změnu L, R označíme (desetinnou) čárkou, tj. např. $[LLRRL] = [L{,}RL]$ nebo jiný příklad $[RRRLRLR] = [RR{,}RLR]$.
3. Dále za (desetinnou) čárkou zaměníme každé R nulou 0 a každé L jedničkou 1. Např. $[L{,}RL] = [L{,}01]$ nebo jiný příklad $[RR{,}RLR] = [RR{,}010]$.
4. Na konec naší posloupnosti zapíšeme ještě jednu jedničku, takže dostaneme $L{,}011$ nebo $RR{,}0101$.
5. Počet počátečních (stejnorodých) znaků odpovídá celému číslu, např. $1 + 0{,}011$ nebo $(-2) + 0{,}101$.
6. Před (desetinou) čárkou máme celé číslo v desítkové soustavě a za čárkou je číslo ve dvojkové soustavě.

Tato metoda se nazývá Berlekampovo pravidlo. Užitečné je také obrátit toto pravidlo, tj. k dané hodnotě sestrojit konkrétní pozici hry HACKENSTRING. Tato metoda se ukáže jako zvlášť zajímavá při vyšetřování nekonečných her.

1.3.1 Racionální čísla.

Dále se budeme zabývat „zlomky“ s ne dvojkovým jmenovatelem.

Pravidlo:

Metodu popíšeme v několika krocích:

1. Pro libovolné racionální číslo n oddělíme celou část k a desetinou část q. Např. pro $3\frac{11}{32}$ dostaneme $k = 3$ a $q = \frac{11}{32}$.
2. Celé číslo prozatím necháme a desetinnou část převedeme do dvojkové soustavy. Pro zlomek q dostaneme

$$q = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}\,.$$

   Např. je-li $q = \frac{11}{32}$, potom

$$q = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32}.$$

Posloupnost a_i zaznamenáme do závorek, tj. v našem příkladě získáme [,01011]

3. K této posloupnosti přidáme celé číslo k, tj. $[k, a_1 a_2 \ldots]$. V našem příkladu 3,01011.
4. Nyní zakódujeme celou část k pomocí L (pokud je $k \geqslant 0$) nebo R (je-li $k < 0$). V našem případě je to $n = [LLL,01011]$.
5. Poslední jedničku vynecháme a dvojkovou (necelou) část opět zakódujeme, místo 0 píšeme R, místo 1 píšeme L.
6. Znak , zaměníme za LR.
7. Konečně nakreslíme herní situaci ve hře Hackenstring, zaměníme-li L bíLým kamenem a R čeRným, tedy

$$|\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ = 3\frac{11}{32}.$$

Ilustrujte tuto metodu ještě na příkladu $2\frac{3}{4}$.

Nyní tuto metodu použijeme pro komplikovanější racionální čísla: Budeme hledat pozici pro hru s hodnotou 1/3. Jak už víme, pozice bude nekonečná.

Příklad 1.18. Nechť $n = 1/3$, $k = 0$ a $q = 1/3$. Číslo 1/3 vyjádříme ve dvojkové soustavě:

$$1/3 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{1}{64} + \cdots .$$

Vidíme, že dostáváme posloupnost $[LR\overline{RL}]$. Pro 1/5 dostaneme $[LR\overline{RRLL}]$ nebo pro $20/7 = 2\frac{6}{7} = 2{,}\overline{110} = [LLLR\overline{LLR}]$ atd.

1.4 Reálná čísla a další možnosti

V této kapitole naše předcházející výsledky zobecníme, dostaneme mj. ordinální čísla a další nadreálná čísla.

Analogicky se pokusíme popsat všechna reálná čísla $\mathbb{R}$. Již jsme viděli, že například 1/3 má nekonečný jednořádkový zápis.

Viděli jsme, že jsme schopni vytvořit celou množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$ pomocí binární reprezentace a k ní jsme vytvořili odpovídající pozici Hackenstringu. Nyní stojíme před otázkou, jak bude vypadat třeba $\sqrt{2}$. Opět použijeme binární reprezentaci.

Příklad 1.19.

1.4.1 Nadreálná čísla

V tomto paragrafu se opět vrátíme k zápisu her pomocí složených závorek a budeme se zabývat o hodnoty her $G = \left\{ G^L \;\middle|\; G^R \right\}$. Nadreálné číslo x je definováno dvojicí množin čísel x^L a x^R, kde x je ostře větší, než prvky množiny x^L a ostře menší než prvky množiny x^R. Píšeme $x = \left\{ x^L \;\middle|\; x^R \right\}$ a říkáme, že x^L je levá množina čísla x a x^R pravá množina čísla x.

Nadreálná čísla jsou jsou specifické hry. Již dříve jsme poznamenali, že můžeme zápis ve složených závorkách zjednodušovat v případě konečných her. Je-li $G = \left\{ G^L \;\middle|\; G^R \right\}$, potom $G = \left\{ \max G^L \;\middle|\; \min G^R \right\}$

Příklad 1.20. $\frac{1}{2} \cdot 4 = \{0 \mid 1\} \cdot \{3 \mid\} = \cdots = \left\{ 1\frac{1}{2} \;\middle|\; 2\frac{1}{2} \right\} = 2$. Podotkněme, že při násobení čísel nezávisí na volbě reprezentantů, tj. např. pro $4 = \{3 \mid 5\}$ dostaneme stejný výsledek.

Konečně zavedeme i další relace $\leqslant, \geqslant$ a $=$.

Definice 1.21. *Nechť* $x = \left\{ x^L \;\middle|\; x^R \right\}$ *a* $y = \left\{ y^L \;\middle|\; y^R \right\}$ *jsou čísla. Potom*

$$
\begin{aligned}
x \geqslant y &\Leftrightarrow y \ngeqslant x^R \wedge y^L \ngeqslant x, \\
x \leqslant y &\Leftrightarrow y \geqslant x, \\
x = y &\Leftrightarrow x \leqslant y \wedge y \leqslant x.
\end{aligned}
$$

Příklad 1.22. Je-li $x = \frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$, $y = 2 = \{1 \mid\}$ a $z = \left\{ \frac{3}{2} \;\middle|\; \frac{5}{2} \right\} = \frac{4}{2}$. Potom $\frac{1}{2} \leqslant 2$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{2}$ a $2 = \frac{4}{2}$.

Nyní se budeme zabývat takovými čísly, jako je $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ nebo π.

Pomocí binárních reprezentací jsme schopni vyjádřit $1/3$ stejnou metodou, jako racionální čísla.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{16}) + (\frac{1}{32} - \frac{1}{64}) + \cdots \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^r.
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{3}$ můžeme také přezávorkovat takto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+(-\frac{1}{16}+\frac{1}{32})+\cdots \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\frac{1}{128}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}-\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1}.\end{aligned}$$

Položíme $x^L = \left\{\left\{\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^r\right\}_{n=1}^{\infty}\right\}$ $x^R = \left\{\left\{\frac{1}{2}-\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\right\}$

Konečně definujme číslo $x = \left\{x^L \mid x^R\right\}$, tj.

$$x = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{16}, \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}, \ldots \;\middle|\; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}, \ldots\right\}$$

tedy

$$1/3 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \ldots \;\middle|\; \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{11}{32}, \ldots\right\}$$

Obě posloupnosti konvergují k $\frac{1}{3}$, jedna zezdola, druhá shora. Obě posloupnosti obsahují nekonečně mnoho členů, což znamená, že nadreálné číslo $1/3$ není dyadické racionální číslo. $1/3$ obsahuje vlevo všechna dyadická čísla $< 1/3$ a pravá strana obsahuje všechna dyadická čísla $> 1/3$.

Toto je pravda pro všechna ostatní reálná čísla, která nejsou dyadickými racionálními čísly. Jejich levé a pravé množiny obsahují nekonečně mnoho prvků (čísel), každé z nich je dyadické číslo. Tedy k sestrojení (nedyadického) reálného čísla musíme mít k dispozici všechna dyadická racionální čísla.

Situace je podobná, jako v případě Dedekindových řezů (racionálních čísel). Položme

$$x^L = \left\{\left\{x-(\frac{1}{2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right\} \qquad x^R = \left\{\left\{x+(\frac{1}{2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}\right\}$$

Příklad 1.23. Pro vytvoření čísla π, vytvoříme

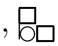
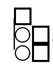
$$\begin{aligned}\pi^L &= \left\{\pi-1, \pi-\frac{1}{2}, \pi-\frac{1}{4}, \ldots\right\} \\ \pi^R &= \left\{\pi+1, \pi+\frac{1}{2}, \pi+\frac{1}{4}, \ldots\right\}\end{aligned}$$

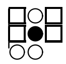
Vznikne $\omega, \omega-1, -\omega, \frac{1}{\omega}, \sqrt{\omega}, \ldots$

1.4.2 Nejsou jen čísla...

Hra Hackenstring s černými, bílými a šedými kameny. Pravidla hry jsou stejná jako v případě černo-bílé varianty. Navíc oba hráči mohou odebírat i čtverečky □, které souvisí se základnou.

Příklad 1.24. Hra |○●□□●○ = {0, |○●, |○●□, |○●□□● | |○, |○●, |○●□, |○●□□}.

Úloha 1.25. 1. Nalezněte hodnotu her |□, |○□, |□○,  = |□ + |○□ nebo .

2. Ve hře  má výhodu levý hráč. Nalezněte jeho strategii.

Hru  $= \{0 \mid 0\}$ označujeme $*$. Tato hra má zajímavé vlastnosti: Je menší něž libovolné kladné číslo, ale větší než libovolné záporné číslo, přičemž $*$ není nula. V nulové hře existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče, zatímco ve hře $*$ existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče. Hra $*$ není číslem a je neporovnatelná s nulou $* \lesseqgtr\!\!\!\!/\ 0$. Říkáme, že $*$ je hra fazy, nebo lépe fazy s nulou, a zapisujeme $* \parallel 0$. Poznamenejme, že $* + * = 0$.